Bộ 40 đề thi vào lớp 10 môn Toán chọn lọc có đáp án

A - PHẦN ĐỀ BÀI

I - ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT

ĐỀ SỐ 1

Câu 1: a) Cho biết $a = 2 + \sqrt{3}$ và $b = 2 - \sqrt{3}$. Tính giá trị biểu thức: $P = a + b - ab$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$.

Câu 2: Cho biểu thức $P = \left(\dfrac{1}{x - \sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x} - 1}\right) : \dfrac{\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x} + 1}$ (với $x > 0$, $x \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm các giá trị của x để $P > \dfrac{1}{2}$.

Câu 3: Cho phương trình: $x^2 - 5x + m = 0$ (m là tham số).

a) Giải phương trình trên khi m = 6.

b) Tìm m để phương trình trên có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $|x_1 - x_2| = 3$.

Câu 4: Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Vẽ dây cung CD vuông góc với AB tại I (I nằm giữa A và O). Lấy điểm E trên cung nhỏ BC (E khác B và C), AE cắt CD tại F. Chứng minh:

a) BEFI là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) $AE.AF = AC^2$.

c) Khi E chạy trên cung nhỏ BC thì tâm đường tròn ngoại tiếp ΔCEF luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Câu 5: Cho hai số dương a, b thỏa mãn: $a + b \leq 2\sqrt{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

ĐỀ SỐ 2

Câu 1: a) Rút gọn biểu thức: $\frac{1}{3-\sqrt{7}}-\frac{1}{3+\sqrt{7}}$.

b) Giải phương trình: $x^2 - 7x + 3 = 0$.

Câu 2: a) Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng d: $y = - x + 2$ và Parabol (P): $y = x^2$.

b) Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 4x + ay = b \\ x - by = a \end{cases}$.

Tìm a và b để hệ đã cho có nghiệm duy nhất (x;y) = (2; - 1).

Câu 3: Một xe lửa cần vận chuyển một lượng hàng. Người lái xe tính rằng nếu xếp mỗi toa 15 tấn hàng thì còn thừa lại 5 tấn, còn nếu xếp mỗi toa 16 tấn thì có thể chở thêm 3 tấn nữa. Hỏi xe lửa có mấy toa và phải chở bao nhiêu tấn hàng.

Câu 4: Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn (O;R) ta vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là tiếp điểm). Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M, vẽ $MI \perp AB$, $MK \perp AC$ ($I \in AB, K \in AC$)

a) Chứng minh: AIMK là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Vẽ $MP \perp BC$ ($P \in BC$). Chứng minh: $\widehat{MPK} = \widehat{MBC}$.

c) Xác định vị trí của điểm M trên cung nhỏ BC để tích MI.MK.MP đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5: Giải phương trình: $\frac{\sqrt{x - 2009}-1}{x - 2009}+\frac{\sqrt{y - 2010}-1}{y - 2010}+\frac{\sqrt{z - 2011}-1}{z - 2011}=\frac{3}{4}$

ĐỀ SỐ 3

Câu 1: Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

b) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases}$

Câu 2: Rút gọn các biểu thức:

a) $A = \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{6}}{1 - \sqrt{2}} - \dfrac{2 + \sqrt{8}}{1 + \sqrt{2}}$

b) $B = \left(\dfrac{1}{x - 4} - \dfrac{1}{x + 4\sqrt{x} + 4} \right) . \dfrac{x + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ (với $x > 0$, $x \neq 4$).

Câu 3: a) Vẽ đồ thị các hàm số $y = - x^2$ và $y = x - 2$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Tìm tọa độ giao điểm của các đồ thị đã vẽ ở trên bằng phép tính.

Câu 4: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O;R). Các đường cao BE và CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh: AEHF và BCEF là các tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Gọi M và N thứ tự là giao điểm thứ hai của đường tròn (O;R) với BE và CF. Chứng minh: MN // EF.

c) Chứng minh rằng OA $\perp$ EF.

Câu 5: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$P = x^2 - x\sqrt{y} + x + y - \sqrt{y} + 1$

ĐỀ SỐ 4

Câu 1: a) Trục căn thức ở mẫu của các biểu thức sau: $\frac{4}{\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$.

b) Trong hệ trục tọa độ Oxy, biết đồ thị hàm số $y = ax^2$ đi qua điểm M (- 2; $\frac{1}{4}$). Tìm hệ số a.

Câu 2: Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $\sqrt{2x+1} = 7 - x$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x - y = \frac{1}{6} \end{cases}$

Câu 3: Cho phương trình ẩn x: $x^2 - 2mx + 4 = 0$ (1)

a) Giải phương trình đã cho khi m = 3.

b) Tìm giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = 2$.

Câu 4: Cho hình vuông ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại E. Lấy I thuộc cạnh AB, M thuộc cạnh BC sao cho: $\widehat{IEM} = 90^0$ (I và M không trùng với các đỉnh của hình vuông).

a) Chứng minh rằng BIEM là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Tính số đo của góc $\widehat{IME}$

c) Gọi N là giao điểm của tia AM và tia DC; K là giao điểm của BN và tia EM. Chứng minh $CK \perp BN$.

Câu 5: Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh:

$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.

ĐỀ SỐ 5

Câu 1: a) Thực hiện phép tính: $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right).\sqrt{6}$

b) Trong hệ trục tọa độ Oxy, biết đường thẳng y = ax + b đi qua điểm A(2; 3) và điểm B(-2;1) Tìm các hệ số a và b.

Câu 2: Giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 3x + 1 = 0$

b) $\frac{x}{x-1} + \frac{-2}{x+1} = \frac{4}{x^2-1}$

Câu 3: Hai ô tô khởi hành cùng một lúc trên quãng đường từ A đến B dài 120 km. Mỗi giờ ô tô thứ nhất chạy nhanh hơn ô tô thứ hai là 10 km nên đến B trước ô tô thứ hai là 0,4 giờ. Tính vận tốc của mỗi ô tô.

Câu 4: Cho đường tròn (O;R); AB và CD là hai đường kính khác nhau của đường tròn. Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O;R) cắt các đường thẳng AC, AD thứ tự tại E và F.

a) Chứng minh tứ giác ACBD là hình chữ nhật.

b) Chứng minh $\Delta ACD \sim \Delta CBE$

c) Chứng minh tứ giác CDFE nội tiếp được đường tròn.

d) Gọi S, S_1, S_2 thứ tự là diện tích của ΔAEF, ΔBCE và ΔBDF. Chứng minh: $\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}=\sqrt{S}$.

Câu 5: Giải phương trình: $10\sqrt{x^3+1} = 3\left(x^2+2\right)$

ĐỀ SỐ 6

Câu 1: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \left(2+\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right).\left(2-\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\right)$

b) $B = \left(\frac{\sqrt{b}}{a - \sqrt{ab}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{ab} - b}\right).\left(a\sqrt{b} - b\sqrt{a}\right)$ (với $a > 0, b > 0, a \neq b$)

Câu 2: a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - y = - 1 & (1) \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 2 & (2) \end{cases}$

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - x - 3 = 0$. Tính giá trị biểu thức: $P = x_1^2 + x_2^2$.

Câu 3:

a) Biết đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm M (2; $\frac{1}{2}$) và song song với đường thẳng $2x + y = 3$. Tìm các hệ số a và b.

b) Tính các kích thước của một hình chữ nhật có diện tích bằng 40 cm^2, biết rằng nếu tăng mỗi kích thước thêm 3 cm thì diện tích tăng thêm 48 cm^2.

Câu 4: Cho tam giác ABC vuông tại A, M là một điểm thuộc cạnh AC (M khác A và C). Đường tròn đường kính MC cắt BC tại N và cắt tia BM tại I. Chứng minh rằng:

a) ABNM và ABCI là các tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) NM là tia phân giác của góc $\widehat{ANI}$.

c) $BM.BI + CM.CA = AB^2 + AC^2$.

Câu 5: Cho biểu thức $A = 2x - 2\sqrt{xy} + y - 2\sqrt{x} + 3$. Hỏi A có giá trị nhỏ nhất hay không? Vì sao?

ĐỀ SỐ 7

Câu 1: a) Tìm điều kiện của x biểu thức sau có nghĩa: $A = \sqrt{x - 1} + \sqrt{3 - x}$

b) Tính: $\frac{1}{3-\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}+1}$

Câu 2: Giải phương trình và bất phương trình sau:

a) $(x - 3)^2 = 4$

b) $\frac{x - 1}{2x + 1} < \frac{1}{2}$

Câu 3: Cho phương trình ẩn x: $x^2 - 2mx - 1 = 0$ (1)

a) Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2.

b) Tìm các giá trị của m để: $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$.

Câu 4: Cho đường tròn (O;R) có đường kính AB. Vẽ dây cung CD vuông góc với AB (CD không đi qua tâm O). Trên tia đối của tia BA lấy điểm S; SC cắt (O; R) tại điểm thứ hai là M.

a) Chứng minh ΔSMA đồng dạng với ΔSBC.

b) Gọi H là giao điểm của MA và BC; K là giao điểm của MD và AB. Chứng minh BMHK là tứ giác nội tiếp và HK // CD.

c) Chứng minh: $OK.OS = R^2$.

Câu 5: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 1 = 2y \\ y^3 + 1 = 2x \end{cases}$.

ĐỀ SỐ 8

Câu 1: a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $3x^2 - x - 2 = 0$. Tính giá trị biểu thức: $P = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

Câu 2: Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1} - \frac{\sqrt{a}}{a - \sqrt{a}} \right) : \frac{\sqrt{a} + 1}{a - 1}$ với $a > 0, a \neq 1$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm các giá trị của a để $A < 0$.

Câu 3: Cho phương trình ẩn x: $x^2 - x + 1 + m = 0$ (1)

a) Giải phương trình đã cho với $m = 0$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1x_2.(x_1x_2 - 2) = 3(x_1 + x_2)$.

Câu 4: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R và tia tiếp tuyến Ax cùng phía với nửa đường tròn đối với AB. Từ điểm M trên Ax kẻ tiếp tuyến thứ hai MC với nửa đường tròn (C là tiếp điểm). AC cắt OM tại E; MB cắt nửa đường tròn (O) tại D (D khác B).

a) Chứng minh: AMCO và AMDE là các tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh $\widehat{ADE} = \widehat{ACO}$.

c) Vẽ CH vuông góc với AB ($H \in AB$). Chứng minh rằng MB đi qua trung điểm của CH.

Câu 5: Cho các số $a, b, c \in [0 ; 1]$. Chứng minh rằng: $a + b^2 + c^3 - ab - bc - ca \leq 1$.

ĐỀ SỐ 9

Câu 1: a) Cho hàm số $y = \left(\sqrt{3} - 2\right)x + 1$. Tính giá trị của hàm số khi $x = \sqrt{3} + 2$.

b) Tìm m để đường thẳng $y = 2x - 1$ và đường thẳng $y = 3x + m$ cắt nhau tại một điểm nằm trên trục hoành.

Câu 2: a) Rút gọn biểu thức: $A = \left(\dfrac{3\sqrt{x} + 6}{x - 4} + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}\right) : \dfrac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$.

b) Giải phương trình: $\dfrac{x^2 - 3x + 5}{(x + 2)(x - 3)} = \dfrac{1}{x - 3}$

Câu 3: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 3x - y = 2m - 1 \\ x + 2y = 3m + 2 \end{cases}$ (1)

a) Giải hệ phương trình đã cho khi m = 1.

b) Tìm m để hệ (1) có nghiệm (x; y) thỏa mãn: $x^2 + y^2 = 10$.

Câu 4: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Lấy điểm M thuộc đoạn thẳng OA, điểm N thuộc nửa đường tròn (O). Từ A và B vẽ các tiếp tuyến Ax và By. Đường thẳng qua N và vuông góc với NM cắt Ax, By thứ tự tại C và D.

a) Chứng minh ACNM và BDNM là các tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh ΔANB đồng dạng với ΔCMD.

c) Gọi I là giao điểm của AN và CM, K là giao điểm của BN và DM. Chứng minh IK //AB.

Câu 5: Chứng minh rằng: $\dfrac{a + b}{\sqrt{a(3a + b)} + \sqrt{b(3b + a)}} \geq \dfrac{1}{2}$ với a, b là các số dương.

ĐỀ SỐ 10

Câu 1: Rút gọn các biểu thức:

a) $A = 3\sqrt{8} - \sqrt{50} - \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}$

b) $B = \dfrac{2}{x - 1}.\sqrt{\dfrac{x^2 - 2x + 1}{4x^2}}$, với $0 < x < 1$

Câu 2:Giải hệ phương trình và phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2(x - 1) + y = 3 \\ x - 3y = - 8 \end{cases}$.

b) $x + 3\sqrt{x} - 4 = 0$

Câu 3: Một xí nghiệp sản xuất được 120 sản phẩm loại I và 120 sản phẩm loại II trong thời gian 7 giờ. Mỗi giờ sản xuất được số sản phẩm loại I ít hơn số sản phẩm loại II là 10 sản phẩm. Hỏi mỗi giờ xí nghiệp sản xuất được bao nhiêu sản phẩm mỗi loại.

Câu 4: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ AC, AD thứ tự là đường kính của hai đường tròn (O) và (O').

a) Chứng minh ba điểm C, B, D thẳng hàng.

b) Đường thẳng AC cắt đường tròn (O') tại E; đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại F (E, F khác A). Chứng minh 4 điểm C, D, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

c) Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A cắt (O) và (O') thứ tự tại M và N. Xác định vị trí của d để CM + DN đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5: Cho hai số x, y thỏa mãn đẳng thức:

$$\left(x + \sqrt{x^2 + 2011}\right)\left(y + \sqrt{y^2 + 2011}\right) = 2011$$

Tính: x + y

ĐỀ SỐ 11

Câu 1: 1) Rút gọn biểu thức:

$$A = \left(\frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a}\right)\left(\frac{1 - \sqrt{a}}{1 - a}\right)^2 \text{ với } a \geq 0 \text{ và } a \neq 1.$$

2) Giải phương trình: $2x^2 - 5x + 3 = 0$

Câu 2: 1) Với giá trị nào của k, hàm số $y = (3 - k)x + 2$ nghịch biến trên R.

2) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x + y = 5 \\ 3x - 2y = -12 \end{cases}$$

Câu 3: Cho phương trình $x^2 - 6x + m = 0$.

1) Với giá trị nào của m thì phương trình có 2 nghiệm trái dấu.

2) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thoả mãn điều kiện $x_1 - x_2 = 4$.

Câu 4: Cho đường tròn (O; R), đường kính AB. Dây BC = R. Từ B kẻ tiếp tuyến Bx với đường tròn. Tia AC cắt Bx tại M. Gọi E là trung điểm của AC.

1) Chứng minh tứ giác OBME nội tiếp đường tròn.

2) Gọi I là giao điểm của BE với OM. Chứng minh: IB.IE = IM.IO.

Câu 5: Cho $x > 0$, $y > 0$ và $x + y \geq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = 3x + 2y + \frac{6}{x} + \frac{8}{y}.$$

ĐỀ SỐ 12

Câu 1: Tính gọn biểu thức:

1) $A = \sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72}$.

2) $B = \left(1 + \dfrac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1}\right)\left(1 + \dfrac{a - \sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}}\right)$ với $a \geq 0, a \neq 1$.

Câu 2: 1) Cho hàm số $y = ax^2$, biết đồ thị hàm số đi qua điểm A (- 2 ; -12). Tìm a.

2) Cho phương trình: $x^2 + 2(m + 1)x + m^2 = 0$. (1)

a. Giải phương trình với m = 5

b. Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt, trong đó có 1 nghiệm bằng - 2.

Câu 3: Một thửa ruộng hình chữ nhật, nếu tăng chiều dài thêm 2m, chiều rộng thêm 3m thì diện tích tăng thêm $100m^2$. Nếu giảm cả chiều dài và chiều rộng đi 2m thì diện tích giảm đi $68m^2$. Tính diện tích thửa ruộng đó.

Câu 4: Cho tam giác ABC vuông ở A. Trên cạnh AC lấy 1 điểm M, dựng đường tròn tâm (O) có đường kính MC. Đường thẳng BM cắt đường tròn tâm (O) tại D, đường thẳng AD cắt đường tròn tâm (O) tại S.

1) Chứng minh tứ giác ABCD là tứ giác nội tiếp và CA là tia phân giác của góc $\widehat{BCS}$.

2) Gọi E là giao điểm của BC với đường tròn (O). Chứng minh các đường thẳng BA, EM, CD đồng quy.

3) Chứng minh M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE.

Câu 5: Giải phương trình.

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x + 3} = \sqrt{x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3}$$

ĐỀ SỐ 13

Câu 1: Cho biểu thức: $P=\left(\dfrac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}}-\dfrac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}}\right):\dfrac{a+2}{a-2}$ với $a>0, a\neq 1, a\neq 2$.

1) Rút gọn P.

2) Tìm giá trị nguyên của a để P có giá trị nguyên.

Câu 2: 1) Cho đường thẳng d có phương trình: $ax + (2a - 1)y + 3 = 0$

Tìm a để đường thẳng d đi qua điểm M (1, -1). Khi đó, hãy tìm hệ số góc của đường thẳng d.

2) Cho phương trình bậc 2: $(m - 1)x^2 - 2mx + m + 1 = 0$.

a) Tìm m, biết phương trình có nghiệm $x = 0$.

b) Xác định giá trị của m để phương trình có tích 2 nghiệm bằng 5, từ đó hãy tính tổng 2 nghiệm của phương trình.

Câu 3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x + 7y = 18 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

Câu 4: Cho ΔABC cân tại A, I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A, O là trung điểm của IK.

1) Chứng minh 4 điểm B, I, C, K cùng thuộc một đường tròn tâm O.

2) Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn tâm (O).

3) Tính bán kính của đường tròn (O), biết AB = AC = 20cm, BC = 24cm.

Câu 5: Giải phương trình: $x^2 + \sqrt{x + 2010} = 2010$.

ĐỀ SỐ 14

Câu 1: Cho biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x} \text{ với } x \ge 0, x \ne 4.$$

1) Rút gọn P.

2) Tìm x để P = 2.

Câu 2: Trong mặt phẳng, với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng d có phương trình: $y = (m-1)x + n$.

1) Với giá trị nào của m và n thì d song song với trục Ox.

2) Xác định phương trình của d, biết d đi qua điểm A(1; - 1) và có hệ số góc bằng -3.

Câu 3: Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x - m - 3 = 0$ (1)

1) Giải phương trình với m = -3

2) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm thoả mãn hệ thức $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

3) Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc giá trị của m.

Câu 4: Cho tam giác ABC vuông ở A (AB > AC), đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A, vẽ nửa đường tròn đường kính BH cắt AB tại E, nửa đường tròn đường kính HC cắt AC tại F. Chứng minh:

1) Tứ giác AFHE là hình chữ nhật.

2) Tứ giác BEFC là tứ giác nội tiếp đường tròn.

3) EF là tiếp tuyến chung của 2 nửa đường tròn đường kính BH và HC.

Câu 5: Các số thực x, a, b, c thay đổi, thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} x + a + b + c = 7 & (1) \\ x^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 13 & (2) \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của x.

ĐỀ SỐ 15

Câu 1: Cho $M = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{x - \sqrt{x}}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 1} + \frac{2}{x - 1}\right)$ với $x > 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn M.

b) Tìm x sao cho M > 0.

Câu 2: Cho phương trình $x^2 - 2mx - 1 = 0$ (m là tham số)

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình trên.

Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$

Câu 3: Một đoàn xe chở 480 tấn hàng. Khi sắp khởi hành có thêm 3 xe nữa nên mỗi xe chở ít hơn 8 tấn. Hỏi lúc đầu đoàn xe có bao nhiêu chiếc, biết rằng các xe chở khối lượng hàng bằng nhau.

Câu 4: Cho đường tròn (O) đường kiính AB = 2R. Điểm M thuộc đường tròn sao cho MA < MB. Tiếp tuyến tại B và M cắt nhau ở N, MN cắt AB tại K, tia MO cắt tia NB tại H.

a) Tứ giác OAMN là hình gì ?

b) Chứng minh KH // MB.

Câu 5: Tìm x, y thoả mãn $5x - 2\sqrt{x}(2 + y) + y^2 + 1 = 0$.

ĐỀ SỐ 16

Câu 1: Cho biểu thức: $K = \frac{x}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2x - \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$

1) Rút gọn biểu thức K
2) Tìm giá trị của biểu thức K tại $x = 4 + 2\sqrt{3}$

Câu 2: 1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm M (-1; 2) và song song với đường thẳng $y = 3x + 1$. Tìm hệ số a và b.

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$

Câu 3: Một đội xe nhận vận chuyển 96 tấn hàng. Nhưng khi sắp khởi hành có thêm 3 xe nữa, nên mỗi xe chở ít hơn lúc đầu 1,6 tấn hàng. Hỏi lúc đầu đội xe có bao nhiêu chiếc.

Câu 4: Cho đường tròn (O) với dây BC cố định và một điểm A thay đổi trên cung lớn BC sao cho AC > AB và AC> BC. Gọi D là điểm chính giữa của cung nhỏ BC. Các tiếp tuyến của (O) tại D và C cắt nhau tại E. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng AB với CD; AD với CE.

1) Chứng minh rằng: DE//BC

2) Chứng minh tứ giác PACQ nội tiếp đường tròn.

3) Gọi giao điểm của các dây AD và BC là F. Chứng minh hệ thức: $\frac{1}{CE} = \frac{1}{CQ} + \frac{1}{CF}$

Câu 5: Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$$

ĐỀ SỐ 17

Câu 1: Cho $x_1 = \sqrt{3 + \sqrt{5}}$ và $x_2 = \sqrt{3 - \sqrt{5}}$

Hãy tính: $A = x_1 . x_2$; $B = x_1^2 + x_2^2$

Câu 2: Cho phương trình ẩn x: $x^2 - (2m + 1) x + m^2 + 5m = 0$

a) Giải phương trình với m = -2.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm sao cho tích các nghiệm bằng 6.

Câu 3: Cho hai đường thẳng (d): $y = - x + m + 2$ và (d’): $y = (m^2 - 2) x + 1$

a) Khi m = -2, hãy tìm toạ độ giao điểm của chúng.

b) Tìm m để (d) song song với (d’)

Câu 4: Cho 3 điểm A, B, C thẳng hàng (B nằm giữa A và C). Vẽ đường tròn tâm O đường kính BC; AT là tiếp tuyến vẽ từ A. Từ tiếp điểm T vẽ đường thẳng vuông góc với BC, đường thẳng này cắt BC tại H và cắt đường tròn tại K ($K \neq T$). Đặt OB = R.

a) Chứng minh $OH.OA = R^2$.

b) Chứng minh TB là phân giác của góc ATH.

c) Từ B vẽ đường thẳng song song với TC. Gọi D, E lần lượt là giao điểm của đường thẳng vừa vẽ với TK và TA. Chứng minh rằng ΔTED cân.

d) Chứng minh $\frac{HB}{HC} = \frac{AB}{AC}$

Câu 5: Cho x, y là hai số thực thoả mãn: $(x + y)^2 + 7(x + y) + y^2 + 10 = 0$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x + y + 1$

ĐỀ SỐ 18

Câu 1: Rút gọn các biểu thức:

1) $\sqrt{45}+\sqrt{20}-\sqrt{5}$.

2) $\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2}$ với $x > 0$.

Câu 2: Một thửa vườn hình chữ nhật có chu vi bằng 72m. Nếu tăng chiều rộng lên gấp đôi và chiều dài lên gấp ba thì chu vi của thửa vườn mới là 194m. Hãy tìm diện tích của thửa vườn đã cho lúc ban đầu.

Câu 3: Cho phương trình: $x^2 - 4x + m + 1 = 0$ (1)

1) Giải phương trình (1) khi m = 2.

2) Tìm giá trị của m để phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn đẳng thức $x_1^2 + x_2^2 = 5(x_1 + x_2)$

Câu 4: Cho 2 đường tròn (O) và (O′) cắt nhau tại hai điểm A, B phân biệt. Đường thẳng OA cắt (O), (O′) lần lượt tại điểm thứ hai C, D. Đường thẳng O′A cắt (O), (O′) lần lượt tại điểm thứ hai E, F.

1. Chứng minh 3 đường thẳng AB, CE và DF đồng quy tại một điểm I.
2. Chứng minh tứ giác BEIF nội tiếp được trong một đường tròn.
3. Cho PQ là tiếp tuyến chung của (O) và (O′) ($P \in (O)$, $Q \in (O')$).

Chứng minh đường thẳng AB đi qua trung điểm của đoạn thẳng PQ.

Câu 5: Giải phương trình: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}=2$

ĐỀ SỐ 19

Câu 1: Cho các biểu thức $A = \frac{5+7\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \frac{11+\sqrt{11}}{1+\sqrt{11}}$, $B = \sqrt{5} : \frac{5}{5+\sqrt{55}}$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Chứng minh: A - B = 7.

Câu 2: Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x + my = 5 \\ mx - y = 1 \end{cases}$

a) Giải hệ khi m = 2

b) Chứng minh hệ có nghiệm duy nhất với mọi m.

Câu 3: Một tam giác vuông có cạnh huyền dài 10m. Hai cạnh góc vuông hơn kém nhau 2m. Tính các cạnh góc vuông.

Câu 4: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Điểm M thuộc nửa đường tròn, điểm C thuộc đoạn OA. Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB chứa điểm M vẽ tiếp tuyến Ax, By. Đường thẳng qua M vuông góc với MC cắt Ax, By lần lượt tại P và Q; AM cắt CP tại E, BM cắt CQ tại F.

a) Chứng minh tứ giác APMC nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh góc $\widehat{PCQ} = 90^0$.

c) Chứng minh AB // EF.

Câu 5: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x^4 + 2x^2 + 2}{x^2 + 1}$.

ĐỀ SỐ 20

Câu 1: Rút gọn các biểu thức :

a) $A = \dfrac{2}{\sqrt{5} - 2} - \dfrac{2}{\sqrt{5} + 2}$

b) $B = \left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) : \left(\dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}\right)$ với $x > 0, x \neq 1$.

Câu 2: Cho phương trình $x^2 - (m + 5)x - m + 6 = 0$ (1)

a) Giải phương trình với m = 1

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có một nghiệm x = - 2

c) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = 24$

Câu 3: Một phòng họp có 360 chỗ ngồi và được chia thành các dãy có số chỗ ngồi bằng nhau. nếu thêm cho mỗi dãy 4 chỗ ngồi và bớt đi 3 dãy thì số chỗ ngồi trong phòng không thay đổi. Hỏi ban đầu số chỗ ngồi trong phòng họp được chia thành bao nhiêu dãy.

Câu 4: Cho đường tròn (O,R) và một điểm S ở ngoài đường tròn. Vẽ hai tiếp tuyến SA, SB (A, B là các tiếp điểm). Vẽ đường thẳng a đi qua S và cắt đường tròn (O) tại M và N, với M nằm giữa S và N (đường thẳng a không đi qua tâm O).

a) Chứng minh: $SO \perp AB$

b) Gọi H là giao điểm của SO và AB; gọi I là trung điểm của MN. Hai đường thẳng OI và AB cắt nhau tại E. Chứng minh rằng IHSE là tứ giác nội tiếp đường tròn.

c) Chứng minh $OI.OE = R^2$.

Câu 5: Tìm m để phương trình ẩn x sau đây có ba nghiệm phân biệt:

$$x^3 - 2mx^2 + (m^2 + 1)x - m = 0 \quad (1).$$

ĐỀ SỐ 21

Câu 1. 1) Trục căn thức ở mẫu số $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$.

2) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x-y=4 \\ 2x+3=0 \end{cases}$.

Câu 2. Cho hai hàm số: $y=x^2$ và $y=x+2$

1) Vẽ đồ thị của hai hàm số này trên cùng một hệ trục Oxy.

2) Tìm toạ độ các giao điểm M, N của hai đồ thị trên bằng phép tính.

Câu 3. Cho phương trình $2x^2+(2m-1)x+m-1=0$ với m là tham số.

1) Giải phương trình khi $m=2$.

2) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn

$4x_1^2+2x_1x_2+4x_2^2=1$.

Câu 4. Cho đường tròn (O) có đường kính AB và điểm C thuộc đường tròn đó (C khác A , B). Lấy điểm D thuộc dây BC (D khác B, C). Tia AD cắt cung nhỏ BC tại điểm E, tia AC cắt tia BE tại điểm F.

1) Chứng minh rằng FCDE là tứ giác nội tiếp đường tròn.

2) Chứng minh rằng DA.DE = DB.DC.

3) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác FCDE, chứng minh rằng IC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Câu 5. Tìm nghiệm dương của phương trình : $7x^2+7x=\sqrt{\frac{4x+9}{28}}$.

ĐỀ SỐ 22

Câu 1: 1) Giải phương trình: $x^2 - 2x - 15 = 0$

2) Trong hệ trục toạ độ Oxy, biết đường thẳng $y = ax - 1$ đi qua điểm M (- 1; 1). Tìm hệ số a.

Câu 2: Cho biểu thức: $P = \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}}\right)\left(\frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1} - \frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)$ với $a > 0, a \neq 1$ 1) Rút gọn biểu thức P

2) Tìm a để $P \geq -2$

Câu 3: Tháng giêng hai tổ sản xuất được 900 chi tiết máy; tháng hai do cải tiến kỹ thuật tổ I vượt mức 15% và tổ II vượt mức 10% so với tháng giêng, vì vậy hai tổ đã sản xuất được 1010 chi tiết máy. Hỏi tháng giêng mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy?

Câu 4: Cho điểm C thuộc đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mp bờ AB vẽ hai tia Ax, By vuông góc với AB. Trên tia Ax lấy một điểm I, tia vuông góc với CI tại C cắt tia By tại K . Đường tròn đường kính IC cắt IK tại P.

1) Chứng minh tứ giác CPKB nội tiếp đường tròn.

2) Chứng minh rằng AI.BK = AC.BC.

3) Tính $\widehat{APB}$.

Câu 5: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + px + q = 0$ biết $p + q = 198$.

ĐỀ SỐ 23

Câu 1.

1) Tính giá trị của $A = \left(\sqrt{20} - 3\sqrt{5} + \sqrt{80}\right)\sqrt{5}$.

2) Giải phương trình $4x^4 + 7x^2 - 2 = 0$.

Câu 2.

1) Tìm m để đường thẳng $y = -3x + 6$ và đường thẳng $y = \frac{5}{2}x - 2m + 1$ cắt nhau tại một điểm nằm trên trục hoành.

2) Một mảnh đất hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 13m và chiều dài lớn hơn chiều rộng 7m. Tính diện tích của hình chữ nhật đó.

Câu 3. Cho phương trình $x^2 - 2x + m - 3 = 0$ với m là tham số.

1) Giải phương trình khi $m = 3$.

2) Tìm giá trị của m để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn điều kiện: $x_1^2 - 2x_2 + x_1x_2 = -12$.

Câu 4. Cho hai đường tròn (O, R) và (O', R') với R > R' cắt nhau tại A và B. Kẻ tiếp tuyến chung DE của hai đường tròn với D $\in$ (O) và E $\in$ (O') sao cho B gần tiếp tuyến đó hơn so với A.

1) Chứng minh rằng $\widehat{DAB} = \widehat{BDE}$.

2) Tia AB cắt DE tại M. Chứng minh M là trung điểm của DE.

3) Đường thẳng EB cắt DA tại P, đường thẳng DB cắt AE tại Q. Chứng minh rằng PQ song song với AB.

Câu 5. Tìm các giá trị x để $\frac{4x + 3}{x^2 + 1}$ là số nguyên âm.

ĐỀ SỐ 24

Câu 1. Rút gọn:

1) $A = (1-\sqrt{5})\cdot\dfrac{\sqrt{5}+5}{2\sqrt{5}}$.

2) $B = \left(1+\dfrac{x+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\left(1+\dfrac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$ với $0 \le x \ne 1$.

Câu 2. Cho phương trình $x^2 + (3-m)x + 2(m-5) = 0$ với m là tham số.

1) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m phương trình luôn có nghiệm $x = 2$.

2) Tìm giá trị của m để phương trình trên có nghiệm $x = 5 - 2\sqrt{2}$.

Câu 3. Một xe ô tô cần chạy quãng đường 80km trong thời gian đã dự định. Vì trời mưa nên một phần tư quãng đường đầu xe phải chạy chậm hơn vận tốc dự định là 15km/h nên quãng đường còn lại xe phải chạy nhanh hơn vận tốc dự định là 10km/h. Tính thời gian dự định của xe ô tô đó.

Câu 4. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Lấy điểm C thuộc nửa đường tròn và điểm D nằm trên đoạn OA. Vẽ các tiếp tuyến Ax, By của nửa đường tròn. Đường thẳng qua C, vuông góc với CD cắt cắt tiếp tuyên Ax, By lần lượt tại M và N.

1) Chứng minh các tứ giác ADCM và BDCN nội tiếp được đường tròn.

2) Chứng mình rằng $\widehat{MDN} = 90^0$.

3) Gọi P là giao điểm của AC và DM, Q là giao điểm của BC và DN. Chứng minh rằng PQ song song với AB.

Câu 5. Cho các số dương a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b} \ge 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right).$$

ĐỀ SỐ 25

Câu 1. Cho biểu thức A = $\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\frac{1}{x-\sqrt{x}}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{2}{x-1}\right)$ với a > 0, a ≠ 1

1) Rút gọn biểu thức A.

2) Tính giá trị của A khi $x=2\sqrt{2}+3$.

Câu 2. Cho phương trình $x^2+ax+b+1=0$ với a,b là tham số.

1) Giải phương trình khi $a=3$ và $b=-5$.

2) Tìm giá trị của a,b để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thoả mãn điều kiện: $\begin{cases}x_1-x_2=3\\x_1^3-x_2^3=9\end{cases}$.

Câu 3. Một chiếc thuyền chạy xuôi dòng từ bến sông A đến bên sông B cách nhau 24km. Cùng lúc đó, từ A một chiếc bè trôi về B với vận tốc dòng nước là 4 km/h. Khi về đến B thì chiếc thuyền quay lại ngay và gặp chiếc bè tại địa điểm C cách A là 8km. Tính vận tốc thực của chiếc thuyền.

Câu 4. Cho đường trong (O, R) và đường thẳng d không qua O cắt đường tròn tại hai điểm A, B. Lấy một điểm M trên tia đối của tia BA kẻ hai tiếp tuyến MC, MD với đường tròn (C, D là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của AB.

1) Chứng minh rằng các điểm M, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

2) Đoạn OM cắt đường tròn tại I. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MCD.

3) Đường thẳng qua O, vuông góc với OM cắt các tia MC, MD thứ tự tại P và Q. Tìm vị trí của điểm M trên d sao cho diện tích tam giác MPQ bé nhất.

Câu 5. Cho các số thực dương a, b, c thoả mãn $a+b+c=\frac{1}{abc}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P = $(a+b)(a+c)$.

ĐỀ SỐ 26

Câu 1: 1) Rút gọn biểu thức: $\frac{1}{2-\sqrt{5}}-\frac{1}{2+\sqrt{5}}$.

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x + y = 9 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$.

Câu 2: Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{x+\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right):\frac{\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}+1}$ với $x > 0$.

1) Rút gọn biểu thức P.

2) Tìm các giá trị của x để $P > \frac{1}{2}$.

Câu 3: Cho phương trình ẩn x: $x^2 - x + m = 0$ (1)

1) Giải phương trình đã cho với m = 1.

2) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $(x_1x_2 - 1)^2 = 9(x_1 + x_2)$.

Câu 4: Cho tứ giác ABCD có hai đỉnh B và C ở trên nửa đường tròn đường kính AD, tâm O. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E. Gọi H là hình chiếu vuông góc của E xuống AD và I là trung điểm của DE. Chứng minh rằng:

1) Các tứ giác ABEH, DCEH nội tiếp được đường tròn.

2) E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCH.

2) Năm điểm B, C, I, O, H cùng thuộc một đường tròn.

Câu 5: Giải phương trình: $\left(\sqrt{x+8}-\sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt{x^2+11x+24}+1\right)=5$.

ĐỀ SỐ 27

Câu 1: Rút gọn các biểu thức sau:

1) A = $\frac{1}{2}\sqrt{20}-\sqrt{80}+\frac{2}{3}\sqrt{45}$

2) B = $\left(2+\frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}\right).\left(2-\frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}\right)$

Câu 2: 1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x - y = 1 - 2y \\ 3x + y = 3 - x \end{cases}$

2) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - x - 3 = 0$.

Tính giá trị biểu thức P = $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

Câu 3. Một xe lửa đi từ Huế ra Hà Nội. Sau đó 1 giờ 40 phút, một xe lửa khác đi từ Hà Nội vào Huế với vận tốc lớn hơn vận tốc của xe lửa thứ nhất là 5 km/h. Hai xe gặp nhau tại một ga cách Hà Nội 300 km. Tìm vận tốc của mỗi xe, giả thiết rằng quãng đường sắt Huế-Hà Nội dài 645km.

Câu 4. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. C là một điểm nằm giữa O và A. Đường thẳng vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn trên tại I. K là một điểm bất kỳ nằm trên đoạn thẳng CI (K khác C và I), tia AK cắt nửa đường tròn (O) tại M, tia BM cắt tia CI tại D. Chứng minh:

1) ACMD là tứ giác nội tiếp đường tròn.

2) $\Delta ABD \sim \Delta MBC$

3) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AKD nằm trên một đường thẳng cố định khi K di động trên đoạn thẳng CI.

Câu 5: Cho hai số dương x, y thỏa mãn điều kiện x + y = 1.

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: A = $\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{xy}$

ĐỀ SỐ 28

Câu 1: 1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 3y = -7 \end{cases}$

2) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $3x^2 - x - 2 = 0$.

Tính giá trị biểu thức $P = x_1^2 + x_2^2$.

Câu 2: Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1} - \dfrac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}} \right) : \dfrac{\sqrt{a}-1}{a-1}$ với $a > 0$, $a \neq 1$.

1) Rút gọn biểu thức A.

2) Tìm các giá trị của a để $A < 0$.

Câu 3: Cho phương trình ẩn x: $x^2 - 2mx - 1 = 0$ (1)

1) Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2.

2) Tìm các giá trị của m để: $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$.

Câu 4: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R và tia tiếp tuyến Ax cùng phía với nửa đường tròn đối với AB. Từ điểm M trên Ax kẻ tiếp tuyến thứ hai MC với nửa đường tròn (C là tiếp điểm). AC cắt OM tại E; MB cắt nửa đường tròn (O) tại D (D khác B).

1) Chứng minh: AMDE là tứ giác nội tiếp đường tròn.

2) $MA^2 = MD.MB$

3) Vẽ CH vuông góc với AB ($H \in AB$). Chứng minh rằng MB đi qua trung điểm của CH.

Câu 5: Giải phương trình: $\dfrac{4}{x} + \sqrt{x - \dfrac{1}{x}} = x + \sqrt{2x - \dfrac{5}{x}}$

ĐỀ SỐ 29

Câu 1: a) Cho đường thẳng d có phương trình: $y = mx + 2m - 4$. Tìm m để đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ.

b) Với những giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y = (m^2 - m)x^2$ đi qua điểm A(-1; 2).

Câu 2: Cho biểu thức $P = \left(\dfrac{1}{\sqrt{a}-3} + \dfrac{1}{\sqrt{a}+3}\right)\left(1 - \dfrac{3}{\sqrt{a}}\right)$ với $a > 0$ và $a \neq 9$.

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm các giá trị của a để $P > \dfrac{1}{2}$.

Câu 3: Hai người cùng làm chung một công việc thì hoàn thành trong 4 giờ. Nếu mỗi người làm riêng, để hoàn thành công việc thì thời gian người thứ nhất ít hơn thời gian người thứ hai là 6 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người phải làm trong bao lâu để hoàn thành công việc.

Câu 4: Cho nửa đường tròn đường kính BC = 2R. Từ điểm A trên nửa đường tròn vẽ $AH \perp BC$. Nửa đường tròn đường kính BH, CH lần lượt có tâm O_1; O_2 cắt AB, AC thứ tự tại D và E.

a) Chứng minh tứ giác ADHE là hình chữ nhật, từ đó tính DE biết R = 25 và BH = 10

b) Chứng minh tứ giác BDEC nội tiếp đường tròn.

c) Xác định vị trí điểm A để diện tích tứ giác DEO_1O_2 đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị đó.

Câu 5: Giải phương trình: $x^3 + x^2 - x = -\dfrac{1}{3}$.

ĐỀ SỐ 30

Câu 1. 1) Giải phương trình: $\sqrt{3}x + \sqrt{75} = 0$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 2x + y = -4 \end{cases}$.

Câu 2. Cho phương trình $2x^2 - (m+3)x + m = 0$ (1) với m là tham số.

1) Giải phương trình khi $m = 2$.

2) Chứng tỏ phương trình (1) có nghiệm với mọi giá trị của m. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (1). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: A = $|x_1 - x_2|$.

Câu 3.

1) Rút gọn biểu thức P = $\dfrac{9\sqrt{a} - \sqrt{25a} + \sqrt{4a^3}}{a^2 + 2a}$ với $a > 0$.

2) Khoảng cách giữa hai bến sông A và B là 48 km. Một canô xuôi dòng từ bến A đến bến B, rồi quay lại bến A. Thời gian cả đi và về là 5 giờ (không tính thời gian nghỉ). Tính vận tốc của canô trong nước yên lặng, biết rằng vận tốc của dòng nước là 4 km/h.

Câu 4. Cho tam giác vuông ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O đường kính AB. Trên tia đối của tia CA lấy điểm D sao cho CD = AC.

1) Chứng minh tam giác ABD cân.

2) Đường thẳng vuông góc với AC tại A cắt đường tròn (O) tại E (E $\neq$ A). Tên tia đối của tia EA lấy điểm F sao cho EF = AE. Chứng minh rằng ba điểm D, B, F cùng nằm trên một đường thẳng.

3) Chứng minh rằng đường tròn đi qua ba điểm A, D, F tiếp xúc với đường tròn (O).

Câu 5. Cho các số dương a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2.$$

ĐỀ SỐ 31

Câu 1: Tính:

a) $A = \sqrt{20} - 3\sqrt{18} - \sqrt{45} + \sqrt{72}$.

b) $B = \sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}}$.

c) $C = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ với $x \geq 1$

Câu 2: Cho hàm số y = (2m - 1)x - m + 2

a) Tìm m để hàm số nghịch biến trên R.

b) Tìm m để đồ thị hàm số đi qua A (1; 2)

Câu 3: Hai người thợ cùng làm công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm 3 giờ, người thứ hai làm 6 giờ thì họ làm được $\frac{1}{4}$ công việc. Hỏi mỗi người làm một mình thì trong bao lâu làm xong công việc?

Câu 4: Cho ba điểm A, B, C cố định thẳng hàng theo thứ tự đó. Vẽ đường tròn (O; R) bất kỳ đi qua B và C ($BC \neq 2R$). Từ A kẻ các tiếp tuyến AM, AN đến (O) (M, N là tiếp điểm). Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BC và MN; MN cắt BC tại D. Chứng minh:

a) $AM^2 = AB.AC$

b) AMON; AMOI là các tứ giác nội tiếp đường tròn.

c) Khi đường tròn (O) thay đổi, tâm đường tròn ngoại tiếp Δ OID luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Câu 5: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình: (2x +1)y = x +1.

ĐỀ SỐ 32

Câu 1: 1) Rút gọn biểu thức: $P = (\sqrt{7} + \sqrt{3} - 2)(\sqrt{7} - \sqrt{3} + 2)$.

2) Trong mp toạ độ Oxy, tìm m để đường thẳng (d): $y = (m^2 - 1)x + 1$ song song với đường thẳng (d'): $y = 3x + m - 1$.

Câu 2: Cho phương trình $x^2 + (2m + 1)x + m^2 + 1 = 0$ (1)

a) Giải phương trình (1) khi m = 1

b) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm âm.

Câu 3: Cho a, b là các số dương thoả mãn ab = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = (a + b + 1)(a^2 + b^2) + \frac{4}{a+b}$.

Câu 4: Qua điểm A cho trước nằm ngoài đường tròn (O) vẽ 2 tiếp tuyến AB, AC (B, C là các tiếp điểm), lấy điểm M trên cung nhỏ BC, vẽ $MH \perp BC$; $MI \perp AC$; $MK \perp AB$.

a) Chứng minh các tứ giác: BHMK, CHMI nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh $MH^2 = MI.MK$

c) Qua M vẽ tiếp tuyến với đường tròn (O) cắt AB, AC tại P, Q. Chứng minh chu vi Δ APQ không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

Câu 5: Chứng minh nếu $|a| > 2$ thì hệ phương trình: $\begin{cases} x^5 - 2y = a \quad (1) \\ x^2 + y^2 = 1 \quad (2) \end{cases}$ vô nghiệm.

ĐỀ SỐ 33

Câu 1: a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} -x + 3y = -10 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$.

b) Với giá trị nào của m thì hàm số y = (m + 2) x - 3 đồng biến trên tập xác định.

Câu 2: Cho biểu thức $A = \left(1 - \frac{2\sqrt{a}}{a+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{a}+1} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+\sqrt{a}+a+1}\right)$ với $a \geq 0$, $a \neq 1$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của A khi $a = 2011 - 2\sqrt{2010}$.

Câu 3: Cho phương trình: $k(x^2 - 4x + 3) + 2(x - 1) = 0$.

a) Giải phương trình với $k = -\frac{1}{2}$.

b) Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của k.

Câu 4: Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R') tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài BC (B, C thứ tự là các tiếp điểm thuộc (O; R) và (O'; R')).

a) Chứng minh $\widehat{BAC} = 90^0$.

b) Tính BC theo R, R'.

c) Gọi D là giao điểm của đường thẳng AC và đường tròn (O) ($D \neq A$), vẽ tiếp tuyến DE với đường tròn (O') ($E \in (O')$). Chứng minh BD = DE.

Câu 5: Cho hai phương trình: $x^2 + a_1x + b_1 = 0$ (1) , $x^2 + a_2x + b_2 = 0$ (2)

Cho biết $a_1a_2 \geq 2(b_1 + b_2)$. Chứng minh ít nhất một trong hai phương trình đã cho có nghiệm.

ĐỀ SỐ 34

Câu 1: Rút gọn biểu thức: $P = \sqrt{(\sqrt{a-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{a-1}-1)^2}$ với $a \geq 1$

Câu 2: Cho biểu thức: $Q = \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)$.

1) Tìm tất cả các giá trị của x để Q có nghĩa. Rút gọn Q.

2) Tìm tất cả các giá trị của x để $Q = -3\sqrt{x} - 3$.

Câu 3: Cho phương trình $x^2 + 2(m-1)|x| + m + 1 = 0$ với m là tham số.

Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt.

Câu 4: Giải phương trình: $\sqrt{3x^2-6x+19} + \sqrt{x^2-2x+26} = 8 - x^2 + 2x$.

Câu 5: Cho đường tròn (O), đường kính AB, d_1, d_2 là các các đường thẳng lần lượt qua A, B và cùng vuông góc với đường thẳng AB. M, N là các điểm lần lượt thuộc d_1, d_2 sao cho $\widehat{MON} = 90^0$.

1) Chứng minh đường thẳng MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

2) Chứng minh $AM \cdot AN = \frac{AB^2}{4}$.

3) Xác định vị trí của M, N để diện tích tam giác MON đạt giá trị nhỏ nhất.

ĐỀ SỐ 35

Câu 1: Rút gọn A = $\dfrac{\sqrt{x^2+6x+9}}{x+3}$ với $x \neq -3$.

Câu 2: a) Giải phương trình $\sqrt{x^2-2x+4}=2$.

b) Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua 2 điểm A(1; 2) và B(2; 0).

Câu 3: Cho phương trình: $(x^2 - x - m)(x - 1) = 0$ (1)

a) Giải phương trình khi m = 2.

b) Tìm m để phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt.

Câu 4: Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O; R) vẽ hai tiếp tuyến MA, MB (tiếp điểm A; B) và cát tuyến cắt đường tròn tại 2 điểm C và D không đi qua O. Gọi I là trung điểm của CD.

a) Chứng minh 5 điểm M, A, I, O, B cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh IM là phân giác của $\widehat{AIB}$.

Câu 5: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4+y^4=1 \\ x^3+y^3=x^2+y^2 \end{cases}$.

ĐỀ SỐ 36

Câu 1: a) Tính $\sqrt{(1+\sqrt{5})^2}+\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}$.

b) Giải phương trình: $x^2 + 2x - 24 = 0$.

Câu 2: Cho biểu thức: P = $\dfrac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3}+\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-3}+\dfrac{3+7\sqrt{a}}{9-a}$ với $a \geq 0$, $a \neq 9$.

a) Rút gọn.

b) Tìm a để P < 1.

Câu 3: Cho phương trình: $x^4 - 5x^2 + m = 0$ (1)

a) Giải phương trình khi m = 4.

b) Tìm m để phương trình (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt.

Câu 4: Cho đường tròn (O), từ điểm A ngoài đường tròn vẽ đường thẳng AO cắt đường tròn (O) tại B, C (AB < AC). Qua A vẽ đường thẳng không đi qua (O) cắt đường tròn (O) tại D; E (AD < AE). Đường thẳng vuông góc với AB tại A cắt đường thẳng CE tại F.

a) Chứng minh tứ giác ABEF nội tiếp đường tròn.

b) Gọi M là giao điểm thứ hai của FB với đường tròn (O), chứng minh DM $\perp$ AC.

c) Chứng minh: CE . CF + AD . AE = AC^2.

Câu 5: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y=\dfrac{2}{1-x}+\dfrac{1}{x}$, với $0 < x < 1$

ĐỀ SỐ 37

Câu 1: Cho biểu thức: M = $\frac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}+x+1$

Rút gọn biểu thức M với $x \ge 0$.

Câu 2: a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x-5y=-18 \\ x+2y=5 \end{cases}$

b) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, với giá trị nào của a, b thì đường thẳng (d): y = ax + 2 - b và đường thẳng (d'): y = (3 - a)x + b song song với nhau.

Câu 3: Cho phương trình: x^2 - 2x + m = 0 (1)

a) Giải phương trình khi m = - 3.

b) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thoả mãn: $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=1$.

Câu 4: Cho Δ ABC có 3 góc nhọn, trực tâm là H và nội tiếp đường tròn (O). Vẽ đường kính AK.

a) Chứng minh tứ giác BHCK là hình hình hành.

b) Vẽ OM $\perp$ BC (M $\in$ BC). Chứng minh H, M, K thẳng hàng và AH = 2.OM.

c) Gọi A', B', C' là chân các đường cao thuộc các cạnh BC, CA, AB của Δ ABC. Khi BC cố định hãy xác định vị trí điểm A để tổng S = A'B' + B'C' + C'A' đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $y = \frac{x^2+x+1}{x^2+2x+2}$.

ĐỀ SỐ 38

Câu 1: Cho biểu thức: P = $\frac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}+1-\frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$.

a) Rút gọi biểu thức P.

b) Tìm x để P = 0.

Câu 2: a) Giải phương trình: $x + \sqrt{1-x^2} = 1$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 6x+6y=5xy \\ \frac{4}{x}-\frac{3}{y}=1 \end{cases}$.

Câu 3: Cho phương trình: $x^2 - 2(m - 1)x + m + 1= 0$. (1)

a) Giải phương trình khi m = - 1.

b) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=4$.

Câu 4: Δ ABC cân tại A. Vẽ đường tròn (O; R) tiếp xúc với AB, AC tại B, C. Đường thẳng qua điểm M trên BC vuông góc với OM cắt tia AB, AC tại D, E.

a) Chứng minh 4 điểm O, B, D, M cùng thuộc một đường tròn.

b) MD = ME.

Câu 5: Giải phương trình: $x^2 + 3x + 1 = (x + 3)\sqrt{x^2+1}$

ĐỀ SỐ 39

Câu 1:

1) Tính: $\sqrt{48} - 2\sqrt{75} + \sqrt{108}$

2) Rút gọn biểu thức: P= $\left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{1+\sqrt{x}}\right).\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ với $x \neq 1$ và $x > 0$

Câu 2: 1) Trên hệ trục tọa độ Oxy, đường thẳng y = ax + b đi qua 2 điểm M (3; 2) và N (4; -1).
Tìm hệ số a và b.

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + 5y = 7 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$

Câu 3: Cho phương trình: $x^2 - 2mx - 6m = 0$ (1)

1). Giải phương trình (1) khi m = 2

2) Tìm m để phương trình (1) có 1 nghiệm gấp 2 lần nghiệm kia.

Câu 4: Cho đường tròn (O), đường kính AB cố định, điểm I nằm giữa A và O sao cho AI = $\frac{2}{3}$AO. Kẻ dây MN vuông góc với AB tại I, gọi C là điểm tùy ý thuộc cung lớn MN sao cho C không trùng với M, N và B. Nối AC cắt MN tại E.

1) Chứng minh tứ giác IECB nội tiếp .

2) Chứng minh hệ thức: $AM^2 = AE.AC$.

3) Hãy xác định vị trí của điểm C sao cho khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME là nhỏ nhất.

Câu 5: Cho x và y là hai số thỏa mãn đồng thời : $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + 3y \leq 6$ và $2x + y \leq 4$.

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $K = x^2 - 2x - y$.

ĐỀ SỐ 40

Câu 1. Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho đường thẳng d có phương trình: $3x + 4y = 2$.

a) Tìm hệ số góc của đường thẳng d.

b) Với giá trị nào của tham số m thì đường thẳng d_1: $y = (m^2 - 1)x + m$ song song với đường thẳng d.

Câu 2. Tìm a, b biết hệ phương trình $\begin{cases} ax + by = 3 \\ bx - ay = 11 \end{cases}$ có nghiệm $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$.

Câu 3. Cho phương trình: $(1+\sqrt{3})x^2 - 2x + 1 - \sqrt{3} = 0$ (1)

a) Chứng tỏ phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt.

b) Gọi 2 nghiệm của phương trình (1) là x_1, x_2. Lập một phương trình bậc 2 có 2 nghiệm là $\frac{1}{x_1}$ và $\frac{1}{x_2}$.

Câu 4. Bên trong hình vuông ABCD vẽ tam giác đều ABE . Vẽ tia Bx thuộc nửa mặt phẳng chứa điểm E, có bờ là đường thẳng AB sao cho Bx vuông góc với BE. Trên tia Bx lấy điểm F sao cho BF = BE.

a) Tính số đo các góc của tam giác ADE.

b) Chứng minh 3 điểm: D, E, F thẳng hàng.

c) Đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác AEB cắt AD tại M. Chứng minh ME // BF.

Câu 5. Hai số thực x, y thoả mãn hệ điều kiện : $\begin{cases} x^3 + 2y^2 - 4y + 3 = 0 & (1) \\ x^2 + x^2y^2 - 2y = 0 & (2) \end{cases}$.

Tính giá trị biểu thức $P = x^2 + y^2$.

II - ĐỀ ÔN THI TUYỂN SINH LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

ĐỀ SỐ 1

Câu 1: Giải các phương trình:

a) $\left(x^2+\dfrac{4}{x^2}\right)-4\left(x-\dfrac{2}{x}\right)-9=0$

b) $\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+7x+10}\right)=3$

Câu 2:

a) Cho 3 số a, b, c khác 0 thỏa mãn: abc = 1 và

$$\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}=\frac{b^3}{a}+\frac{c^3}{b}+\frac{a^3}{c}.$$

Chứng minh rằng trong 3 số a, b, c luôn tồn tại một số là lập phương của một trong hai số còn lại.

b) Cho $x=\sqrt[3]{1+\dfrac{\sqrt{84}}{9}}+\sqrt[3]{1-\dfrac{\sqrt{84}}{9}}$. Chứng minh x có giá trị là một số nguyên.

Câu 3: Cho các số dương x, y, z thỏa mãn: $x + y + z \le 3$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+z^2}+2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right).$$

Câu 4: Cho đường tròn (O; R) và điểm A nằm ngoài đường tròn sao cho $OA = R\sqrt{2}$. Từ A vẽ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Lấy D thuộc AB; E thuộc AC sao cho chu vi của tam giác ADE bằng 2R.

a) Chứng minh tứ giác ABOC là hình vuông.

b) Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn (O; R).

c) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích ΔADE.

Câu 5: Trên mặt phẳng cho 99 điểm phân biệt sao cho từ 3 điểm bất kì trong số chúng đều tìm được 2 điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn có bán kính bằng 1 chứa không ít hơn 50 điểm.

ĐỀ SỐ 2

Câu 1: a) Tìm các số hữu tỉ x, y thỏa mãn đẳng thức:

$x\,(\sqrt{2011}+\sqrt{2010})+y(\sqrt{2011}-\sqrt{2010})=\sqrt{2011^3}+\sqrt{2010^3}$

b) Tìm tất cả các số nguyên $x \ge y \ge z \ge 0$ thoả mãn:

$xyz + xy + yz + zx + x + y + z = 2011$.

Câu 2: a) Giải phương trình: $2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3+1}$.

b) Cho a, b, c $\in$ [0; 2] và a + b + c = 3. Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 \le 5$.

Câu 3: Tìm tất cả các số hữu tỉ x sao cho giá trị của biểu thức $x^2 + x + 6$ là một số chính phương.

Câu 4: Cho đường tròn (O) ngoại tiếp Δ ABC có H là trực tâm. Trên cung nhỏ BC lấy điểm M. Gọi N, I, K lần lượt là hình chiếu của M trên BC, CA, AB. Chứng minh:

a) Ba điểm K, N, I thẳng hàng.

b) $\dfrac{AB}{MK} + \dfrac{AC}{MI} = \dfrac{BC}{MN}$.

c) NK đi qua trung điểm của HM.

Câu 5: Tìm GTLN và GTNN của biểu thức: $P = 2x^2 - xy - y^2$ với x, y thoả mãn điều kiện sau:

$x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$.

ĐỀ SỐ 3

Câu 1: a) Cho a, b, c là 3 số từng đôi một khác nhau và thoả mãn:

$$\frac{a}{b - c} + \frac{b}{c - a} + \frac{c}{a - b} = 0$$

Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{(b - c)^2} + \dfrac{b}{(c - a)^2} + \dfrac{c}{(a - b)^2} = 0$

b) Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \left(\frac{\sqrt[4]{2010^2} - \sqrt[4]{2010}}{1 - \sqrt[4]{2010}} + \frac{1 + \sqrt{2010}}{\sqrt[4]{2010}}\right)^2 - \frac{\sqrt{1 + \dfrac{2}{\sqrt{2010}} + \dfrac{1}{2010}}}{1 + \sqrt{2010}}$$

Câu 2: a) Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh tam giác, chứng minh:

$$\frac{1}{a^2 + bc} + \frac{1}{b^2 + ac} + \frac{1}{c^2 + ab} \le \frac{a + b + c}{2abc}.$$

b) Cho biểu thức: $A = x - 2\sqrt{xy} + 3y - 2\sqrt{x} + 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

Câu 3: a) Giải phương trình: $2\sqrt{x - 1} + 3\sqrt{5 - x} = 2\sqrt{13}$.

b) Cho hàm số y = f(x) với f(x) là một biểu thức đại số xác định với mọi số thực x khác không. Biết rằng: $f(x) + 3f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x^2 \quad \forall x \neq 0$. Tính giá trị của f(2).

Câu 4: Cho lục giác đều ABCDEF. Gọi M là trung điểm của EF, K là trung điểm của BD. Chứng minh tam giác AMK là tam giác đều.

Câu 5: Cho tứ giác lồi ABCD có diện tích S và điểm O nằm trong tứ giác sao cho: $OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = 2S$. Chứng minh ABCD là hình vuông có tâm là điểm O.

ĐỀ SỐ 4

Câu 1: a) Cho x và y là 2 số thực thoả mãn $x^2 + y^2 = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : $A = \dfrac{xy}{x+y+2}$.

b) Cho x, y, z là 3 số thực dương thoả mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Chứng minh:

$$\frac{2}{x^2+y^2} + \frac{2}{y^2+z^2} + \frac{2}{z^2+x^2} \le \frac{x^3+y^3+z^3}{2xyz} + 3.$$

Câu 2: a) Giải phương trình: $x^2 + 9x + 20 = 2\sqrt{3x+10}$.

b) Tìm x, y thoả mãn: $\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0 \\ 2x^2 - 4x + 3 = -y^3 \end{cases}$.

Câu 3: a) Chứng minh rằng nếu: $\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2y^4}} = a$ thì $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$.

b) Chứng minh rằng nếu phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ có nghiệm thì $5(a^2 + b^2) \ge 4$.

Câu 4: Cho nửa đường tròn tâm (O) đường kính AB = 2R và bán kính OC vuông góc với AB. Tìm điểm M trên nửa đường tròn sao cho $2MA^2 = 15MK^2$, trong đó K là chân đường vuông góc hạ từ M xuống OC.

Câu 5: Cho hình thang ABCD (AB//CD). Gọi E và F lần lượt là trung điểm của BD và AC. Gọi G là giao điểm của đường thẳng đi qua F vuông góc với AD với đường thẳng đi qua E vuông góc với BC. So sánh GD và GC.

ĐỀ SỐ 5

Câu 1: 1) Giải phương trình: $x^2 + \dfrac{81x^2}{(x+9)^2} = 40$.

2) Giải phương trình:

$$x^2 - 2x + 3(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = 7.$$

Câu 2: 1) Tìm giá trị nhỏ nhất biểu thức: $A = \dfrac{5-3x}{\sqrt{1-x^2}}$.

2) Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác. Chứng minh:

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} \ge \sqrt{2}\,(a+b+c).$$

Câu 3: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^2 - xy + 1 = 0 & (1) \\ x^2 + 2x + y^2 + 2y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Câu 4: Cho hình thang ABCD có 2 đáy BC và AD (BC $\neq$ AD). Gọi M, N là 2 điểm lần lượt trên 2 cạnh AB và DC sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CD}$. Đường thẳng MN cắt AC và BD tương ứng với E và F. Chứng minh EM = FN.

Câu 5: Cho đường tròn tâm (O) và dây AB, điểm M chuyển động trên đường tròn. Từ M kẻ MH vuông góc với AB (H $\in$ AB). Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên MA, MB. Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với EF cắt AB tại D.

1) Chứng minh đường thẳng MD luôn đi qua 1 điểm cố định khi M thay đổi trên đường tròn.

2) Chứng minh: $\frac{MA^2}{MB^2} = \frac{AH}{BD} \cdot \frac{AD}{BH}$.

ĐỀ SỐ 6

Câu 1: Tính giá trị biểu thức: A =

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{24} + \sqrt{25}}.$$

Câu 2: a) Cho các số khác không a, b, c. Tính giá trị của biểu thức:

$$M = x^{2011} + y^{2011} + z^{2011}$$

Biết x, y, z thoả mãn điều kiện: $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$

b) Chứng minh rằng với $a > \frac{1}{8}$ thì số sau đây là một số nguyên dương.

$$x = \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}.$$

Câu 3: a) Cho a, b, c > 0 thoả mãn: $\frac{1}{1+a} + \frac{35}{35+2b} \leq \frac{4c}{4c+57}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của A = a.b.c.

b) Giả sử a, b, c, d, A, B, C, D là những số dương và

$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} = \frac{d}{D}$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{aA} + \sqrt{bB} + \sqrt{cC} + \sqrt{dD} = \sqrt{(a+b+c+d)(A+B+C+D)}$$

Câu 4: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Gọi M, N, P, Q là bốn đỉnh của một hình chữ nhật (M và N nằm trên cạnh BC, P nằm trên cạnh AC và Q nằm trên cạnh AB).

a) Chứng minh rằng: Diện tích hình chữ nhật MNPQ có giá trị lớn nhất khi PQ đi qua trung điểm của đường cao AH.

b) Giả sử AH = BC. Chứng minh rằng, mọi hình chữ nhật MNPQ đều có chu vi bằng nhau.

Câu 5: Cho tam giác ABC vuông cân ở A, đường trung tuyến BM. Gọi D là hình chiếu của C trên tia BM, H là hình chiếu của D trên AC. Chứng minh rằng AH = 3HD.

B - PHẦN LỜI GIẢI

I - LỚP 10 THPT

ĐỀ SỐ 1

Câu 1: a) Ta có: $a + b = (2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3}) = 4$

$a.b = (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3} = 1$. Suy ra P = 3.

b) $\begin{cases}3x + y = 5\\ x - 2y = -3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6x + 2y = 10\\ x - 2y = -3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7x = 7\\ y = 5 - 3x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 1\\ y = 2\end{cases}$.

Câu 2:

a) $P = \left(\dfrac{1}{x - \sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right) : \dfrac{\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x} + 1}$

$= \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)} + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}\right) . \dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\sqrt{x}}$

$= \dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)} . \dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\sqrt{x}} = \dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}.\sqrt{x}} = \dfrac{x - 1}{x}$

b) Với $x > 0$, $x \neq 1$ thì $\dfrac{x - 1}{x} > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2\left(x - 1\right) > x \Leftrightarrow x > 2$.

Vậy với $x > 2$ thì $P > \dfrac{1}{2}$.

Câu 3: a) Với m = 6, ta có phương trình: $x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Delta = 25 - 4.6 = 1$. Suy ra phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 3$; $x_2 = 2$.

b) Ta có: $\Delta = 25 - 4.m$

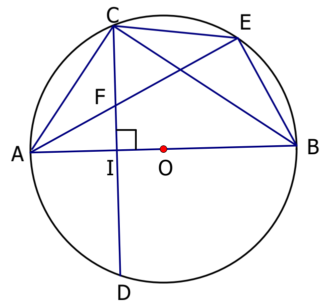
Để phương trình đã cho có nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \dfrac{25}{4}$ (*)

Theo hệ thức Vi-ét, ta có $x_1 + x_2 = 5$ (1); $x_1x_2 = m$ (2).

Mặt khác theo bài ra thì $\left|x_1 - x_2\right| = 3$ (3). Từ (1) và (3) suy ra $x_1 = 4$; $x_2 = 1$ hoặc $x_1 = 1$; $x_2 = 4$ (4)

Từ (2) và (4) suy ra: m = 4. Thử lại thì thoả mãn.

Câu 4:



a) Tứ giác BEFI có: $\widehat{BIF} = 90^0$ (gt) (gt)

$\widehat{BEF} = \widehat{BEA} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra tứ giác BEFI nội tiếp đường tròn đường kính BF

b) Vì $AB \perp CD$ nên $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$,

suy ra $\widehat{ACF} = \widehat{AEC}$.

Xét ΔACF và ΔAEC có góc A chung và

$\widehat{ACF} = \widehat{AEC}$.

Suy ra: ΔACF ~ với ΔAEC $\Rightarrow \dfrac{AC}{AF} = \dfrac{AE}{AC}$

$\Rightarrow AE.AF = AC^2$

c) Theo câu b) ta có $\widehat{ACF} = \widehat{AEC}$, suy ra AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔCEF (1).

Mặt khác $\widehat{ACB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), suy ra $AC \perp CB$ (2). Từ (1) và (2) suy ra CB chứa đường kính của đường tròn ngoại tiếp ΔCEF, mà CB cố định nên tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔCEF thuộc CB cố định khi E thay đổi trên cung nhỏ BC.

Câu 5: Ta có $(a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow (a + b)^2 \geq 4ab$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b)}{ab} \geq \frac{4}{(a+b)} \Leftrightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \geq \frac{4}{(a+b)} \Rightarrow P \geq \frac{4}{(a+b)}, \text{ mà } a + b \leq 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{(a+b)} \geq \frac{4}{2\sqrt{2}} \Rightarrow P \geq \sqrt{2}. \text{ Dấu “ = ” xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)^2 = 0 \\ a + b = 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \sqrt{2}. \quad \text{Vậy: min } P = \sqrt{2}.$$

Lời bình:

<u>Câu IIb</u>

Các bạn tham khảo thêm một lời giải sau

1) Ta có a = 1. Δ = 25 – 4m. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm nếu có của phương trình.

Từ công thức $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \Delta}{2a} \Rightarrow |x_1 - x_2| = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$. ***Vậy nên phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn***

$|x_1 - x_2| = 3 \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 3 \overset{a=1}{\Leftrightarrow} \Delta = 9 \Leftrightarrow 25 - 4m = 9 \Leftrightarrow m = 4$.

2) Có thể bạn dang băn khoăn không thấy điều kiện Δ ≥ 0. Xin đừng, bởi $|x_1 - x_2| = 3 \Leftrightarrow \Delta = 9$. Điều băn khoăn ấy càng làm nổi bật ưu điểm của lời giải trên. Lời giải đã giảm thiểu tối đa các phép toán, điều ấy đồng hành giảm bớt nguy sơ sai sót.

Câu IVb

• Để chứng minh một đẳng thức của tích các đoạn thẳng người ta thường gán các đoạn thẳng ấy vào một cặp tam giác đồng dạng. Một thủ thuật để dễ nhận ra cặp tam giác đồng dạng là chuyển "hình thức" đẳng thức đoạn thẳng ở dạng tích về dạng thương. Khi đó mỗi tam giác được xét sẽ có cạnh hoặc là nằm cùng một vế, hoặc cùng nằm ở tử thức, hoặc cùng nằm ở mẫu thức.

Trong bài toán trên $AE.AF = AC^2 \Leftrightarrow \frac{AC}{AF} = \frac{AE}{AC}$***. Đẳng thức mách bảo ta xét các cặp tam giác đồng dạng*** ΔACF ***(có cạnh nằm vế trái) và*** ΔACE ***(có cạnh nằm vế phải).***

• Khi một đoạn thẳng là trung bình nhân của hai đoạn thẳng còn lại, chẳng hạn $AE.AF = AC^2$ ***thì AC là cạnh chung của hai tam giác, còn AE và AF không cùng năm trong một tam giác cần xét.***

Trong bài toán trên AC là cạnh chung của hai tam giác ΔACE ***và*** ΔACF

Câu IVc

• Nếu (Δ) là đường thẳng cố định chứa tâm của đường tròn biến thiên có các đặc điểm sau:

+ Nếu đường tròn có hai điểm cố định thì (Δ) là trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm cố định ấy.

+ Nếu đường tròn có một điểm cố định thì (Δ) là đường thẳng đi qua điểm đó và

− hoặc là (Δ) ⊥ (Δ'),

− hoặc là (Δ) // (Δ'),

− hoặc là (Δ) tạo với (Δ') một góc không đổi

(trong đó (Δ') là một đường thẳng cố định có sẵn).

• Trong bài toán trên, đường tròn ngoại tiếp ΔCEF ***chỉ có một điểm C là cố định. Lại thấy CB ⊥ CA mà CA cố định nên phán đoán có thể CB là đường thẳng phải tìm. Đó là điều dẫn dắt lời giải trên.***

Câu V

Việc tìm GTNN của biểu thức P bao giờ cũng vận hành theo sơ đồ "bé dần": $P \geq B$***, (trong tài liệu này chúng tôi sử dụng B - chữ cái đầu của chữ bé hơn).***

1) Giả thiết $a + b \leq 2\sqrt{2}$ ***đang ngược với sơ đồ "bé dần" nên ta phải chuyển hoá*** $a + b \leq 2\sqrt{2}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{a+b} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Từ đó mà lời giải đánh giá P theo $\frac{1}{a+b}$.

2) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$ ***với a > 0, b > 0 là một bất đẳng thức đáng nhớ. Tuy là một hệ quả của bất đẳng Cô-si, nhưng nó được vận dụng rất nhiều. Chúng ta còn gặp lại nó trong một số đề sau.***

3) Các bạn tham khảo lời giải khác của bài toán như là một cách chứng minh bất đẳng thức trên.

Với hai số a > 0, b > 0 ta có $P=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\overset{Co-si}{\ge}\frac{2}{\sqrt{ab}}\overset{Co-si}{\ge}\frac{2.2}{a+b}=\frac{4}{a+b}\ge\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$***. Dấu đẳng thức có khi a = b =*** $\sqrt{2}$***. Vậy minP =*** $\sqrt{2}$***.***

ĐỀ SỐ 2

Câu 1: a) $\frac{1}{3-\sqrt{7}}-\frac{1}{3+\sqrt{7}}=\frac{\left(3+\sqrt{7}\right)-\left(3-\sqrt{7}\right)}{\left(3-\sqrt{7}\right)\left(3+\sqrt{7}\right)}=\frac{2\sqrt{7}}{2}=\sqrt{7}$

b) Δ = 49 – 4.3 = 37; phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$x_1=\frac{7+\sqrt{37}}{2};x_2=\frac{7-\sqrt{37}}{2}$.

Câu 2: a) Hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P) là nghiệm của phương trình: - x + 2 = $x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$. Phương trình này có tổng các hệ số bằng 0 nên có 2 nghiệm là 1 và – 2.

+ Với x = 1 thì y = 1, ta có giao điểm thứ nhất là (1;1)

+ Với x = - 2 thì y = 4, ta có giao điểm thứ hai là (- 2; 4)

Vậy (d) giao với (P) tại 2 điểm có tọa độ là (1;1) và (- 2; 4)

b) Thay x = 2 và y = -1 vào hệ đã cho ta được:

$$\begin{cases}8 - a = b\\ 2 + b = a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a = 2 + b\\ 8 - \left(2 + b\right) = b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a = 5\\ b = 3\end{cases}.$$

Thử lại : Thay a = 5 và b = 3 vào hệ đã cho thì hệ có nghiệm duy nhất (2; - 1).

Vậy a = 5; b = 3 thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất (2; - 1).

Câu 3: Gọi x là số toa xe lửa và y là số tấn hàng phải chở

Điều kiện: $x \in N^*$, y > 0.

Theo bài ra ta có hệ phương trình: $\begin{cases}15x = y - 5\\ 16x = y + 3\end{cases}$. Giải ra ta được: x = 8, y = 125 (thỏa mãn)

Vậy xe lửa có 8 toa và cần phải chở 125 tấn hàng.

Câu 4:

a) Ta có: $\widehat{AIM}=\widehat{AKM}=90^0$ (gt), suy ra tứ giác AIMK nội tiếp đường tròn đường kính AM.

b) Tứ giác CPMK có $\widehat{MPC} = \widehat{MKC} = 90^0$ (gt). Do đó CPMK là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MPK} = \widehat{MCK}$ (1). Vì KC là tiếp tuyến của (O) nên ta có: $\widehat{MCK} = \widehat{MBC}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{MC}$) (2). Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{MPK} = \widehat{MBC}$ (3)

c)

Chứng minh tương tự câu b ta có BPMI là tứ giác nội tiếp.

Suy ra: $\widehat{MIP} = \widehat{MBP}$ (4). Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{MPK} = \widehat{MIP}$.

Tương tự ta chứng minh được $\widehat{MKP} = \widehat{MPI}$.

Suy ra: MPK ~ ΔMIP $\Rightarrow \dfrac{MP}{MK} = \dfrac{MI}{MP}$

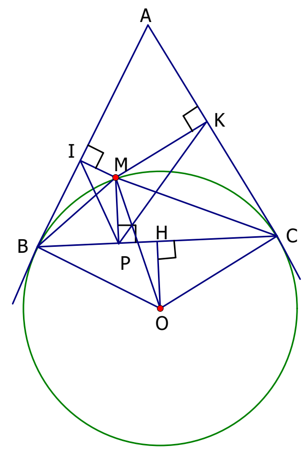
$\Rightarrow$ MI.MK = MP^2 $\Rightarrow$ MI.MK.MP = MP^3.

Do đó MI.MK.MP lớn nhất khi và chỉ khi MP lớn nhất (4)

- Gọi H là hình chiếu của O trên BC, suy ra OH là hằng số (do BC cố định).

Lại có: MP + OH $\leq$ OM = R $\Rightarrow$ MP $\leq$ R – OH.

Do đó MP lớn nhất bằng R – OH khi và chỉ khi O, H, M thẳng hàng hay M nằm chính giữa cung nhỏ BC (5). Từ (4) và (5) suy ra max (MI.MK.MP) = (R – OH)^3 $\Leftrightarrow$ M nằm chính giữa cung nhỏ BC.



Câu 5: Đặt $\sqrt{x - 2009} = a; \sqrt{y - 2010} = b; \sqrt{z - 2011} = c$

(với a, b, c > 0). Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$\frac{a - 1}{a^2} + \frac{b - 1}{b^2} + \frac{c - 1}{c^2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{c} + \frac{1}{c^2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{c}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 2$$

Suy ra: x = 2013, y = 2014, z = 2015.

Lời bình:

<u>Câu IVc</u>

Lời bình sau Đề số 1 cho thấy: Nếu có AE.AF.AC = AC^3 $\Leftrightarrow$ AE.AF = AC^2 thì thường AC là cạnh chung của hai tam giác ΔACE và ΔACF.

Quan sát hình vẽ ta thấy MP là cạnh chung của hai tam giác MPI và MPK, nên ta phán đoán MI.MK.MP= MP³.

Nếu phán đoán ấy là đúng thì GTLN của MI.MK.MP chính là GTLN của MP. Đó là điều dẫn dắt lời giải trên.

<u>Câu IIa</u>

☒Lời nhắn

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị (d): y = kx + b và (P) : y = ax² là nghiệm của phương trình ax² = kx + b (1). Số nghiệm của phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị hai hàm số trên.

<u>Câu V</u>

1) • Việc đặt a, b, c thay cho các căn thức là cách làm để dễ nhìn bài toán, Với mọi số dương a, b, c ta luôn có

$$\frac{a-1}{a^2}+\frac{b-1}{b^2}+\frac{c-1}{c^2}\le\frac{3}{4}. \quad \textit{(1)}$$

Thay vì đặt câu hỏi khi nào thì dấu đẳng thức xẩy ra, người ta đặt bài toán giải phương trình

$$\frac{a-1}{a^2}+\frac{b-1}{b^2}+\frac{c-1}{c^2}=\frac{3}{4}. \quad \textit{(2)}$$

• Vai trò của a, b, c đều bình đẳng nên trong (1) ta nghĩ đến đánh giá $\frac{a-1}{a^2}\le\frac{1}{4}$.

Thật vậy $\frac{a-1}{a^2}\le\frac{1}{4}$ ⇔ $\frac{a-1}{a^2}-\frac{1}{4}\le 0$ ⇔ $-\frac{(a-2)^2}{a^2}\le 0$. ***Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi a = 2. Tương tự ta cũng có*** $\frac{b-1}{b^2}\le\frac{1}{4}$, $\frac{c-1}{c^2}\le\frac{1}{4}$. ***Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi b = 2, c = 2.***

2) Mỗi giá trị của biến cân bằng bất đẳng thức được gọi là điểm rơi của bất đẳng thức ấy.

Theo đó, bất đẳng thức (1) các biến a, b, c đếu có chung một điểm rơi là a = b = c = 2.

Khi vai trò của các biến trong bài toán chứng minh bất đẳng thức bình đẳng với nhau thì các biến ấy có chung một điểm rơi.

Phương trình diễn tả dấu bằng trong bất đẳng thức được gọi là "phương trình điểm rơi".

3) Phương trình (2) thuộc dạng "phương trình điểm rơi"

Tại điểm rơi a = b = c = 2 ta có $\frac{a-1}{a^2}=\frac{b-1}{b^2}=\frac{c-1}{c^2}=\frac{1}{4}$.

Điều đó cắt nghĩa điểm mấu chốt của lời giải là tách $\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$:

$$\textit{(2)} \Leftrightarrow \left(\frac{a-1}{a^2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{b-1}{b^2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{c-1}{c^2}-\frac{1}{4}\right)=0.$$

4) Phần lớn các phương trình chứa hai biến trở lên trong chương trình THCS đều là "phương trình điểm rơi".

ĐỀ SỐ 3

Câu 1: a) Đặt $x^2 = y$, $y \geq 0$. Khi đó phương trình đã cho có dạng: $y^2 + 3y - 4 = 0$ (1).

Phương trình (1) có tổng các hệ số bằng 0 nên (1) có hai nghiệm $y_1 = 1$; $y_2 = -4$. Do $y \geq 0$ nên chỉ có $y_1 = 1$ thỏa mãn. Với $y_1 = 1$ ta tính được $x = \pm 1$. Vậy phương trình có nghiệm là $x = \pm 1$.

b) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 4y = 4 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

Câu 2: a) $A = \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{6}}{1 - \sqrt{2}} - \dfrac{2 + \sqrt{8}}{1 + \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}\left(1 - \sqrt{2}\right)}{1 - \sqrt{2}} - \dfrac{2\left(1 + \sqrt{2}\right)}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{3} - 2$

b) $B = \left(\dfrac{1}{x - 4} - \dfrac{1}{x + 4\sqrt{x} + 4}\right) . \dfrac{x + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \left(\dfrac{1}{\left(\sqrt{x} - 2\right)\left(\sqrt{x} + 2\right)} - \dfrac{1}{(\sqrt{x} + 2)^2}\right) . \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)}{\sqrt{x}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{x} - 2} - \dfrac{1}{\sqrt{x} + 2} = \dfrac{\left(\sqrt{x} + 2\right) - \left(\sqrt{x} - 2\right)}{x - 4} = \dfrac{4}{x - 4}$

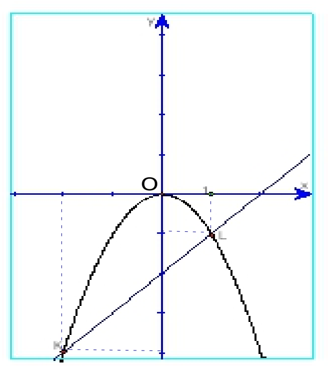
Câu 3:

a) Vẽ đồ thị các hàm số $y = -x^2$ và $y = x - 2$.

b) Hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = x - 2$ và parabol $y = -x^2$ là nghiệm của phương trình: $-x^2 = x - 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$

Suy ra các giao điểm cần tìm là: L(1; -1) và K (- 2; - 4)

(xem hình vẽ).



Câu 4:

a) Tứ giác AEHF có: $\widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^0$ (gt). Suy ra AEHFlà tứ giác nội tiếp.

- Tứ giác BCEF có: $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^0$ (gt). Suy ra BCEF là tứ giác nội tiếp.

b) Tứ giác BCEF nội tiếp suy ra: $\widehat{BEF} = \widehat{BCF}$ (1). Mặt khác $\widehat{BMN} = \widehat{BCN} = \widehat{BCF}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BN}$) (2). Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{BEF} = \widehat{BMN} \Rightarrow MN // EF$.

c) Ta có: $\widehat{ABM} = \widehat{ACN}$ (do BCEF nội tiếp) $\Rightarrow \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AN} \Rightarrow AM = AN$, lại có OM = ON nên suy ra OA là đường trung trực của MN $\Rightarrow OA \perp MN$, mà MN song song với EF nên suy ra $OA \perp EF$.

Câu 5: ĐK: $y \geq 0$; $x \in R$. Ta có: P =

$$x^2 - x\sqrt{y} + x + y - \sqrt{y} + 1 = x^2 - x(\sqrt{y} - 1) + \frac{\left(\sqrt{y}-1\right)^2}{4} + \frac{3y}{4} - \frac{\sqrt{y}}{2} + \frac{3}{4}$$

$$= \left(x - \frac{\sqrt{y}-1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\sqrt{y} - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \geq \frac{2}{3}.$$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{3} \\ 1 \end{cases}$.

Suy ra: Min P = $\frac{2}{3}$.

ĐỀ SỐ 4

Câu 1:

a) $\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$; $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)} = \frac{5+\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2 - 1} = \frac{5+\sqrt{5}}{4}$.

b) Thay x = - 2 và y = $\frac{1}{4}$ vào hàm số y = ax^2 ta được:

$\frac{1}{4} = a.(-2)^2 \Leftrightarrow 4a = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = \frac{1}{16}$.

Câu 2:

a) $\sqrt{2x+1} = 7 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 7 - x \geq 0 \\ 2x + 1 = (7 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 7 \ (1) \\ x^2 - 16x + 48 = 0 \end{cases}$

Giải phương trình: $x^2 - 16x + 48 = 0$ ta được hai nghiệm là 4 và 12. Đối chiếu với điều kiện (1) thì chỉ có x = 4 là nghiệm của phương trình đã cho.

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x - y = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 6y = 4 \\ 6x - 6y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x = 5 \\ y = x - \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$.

Câu 3: a) Với m = 3 ta có phương trình: $x^2 - 6x + 4 = 0$.

Giải ra ta được hai nghiệm: $x_1 = 3 + \sqrt{5};\ x_2 = 3 - \sqrt{5}$.

b) Ta có: $\Delta' = m^2 - 4$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 2 \\ m \leq -2 \end{array}\right.$ (*).

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1x_2 = 4$. Suy ra: $(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = 2$

$\Leftrightarrow x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 + 2x_2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 8 + 4m = 0$

$\Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m_1 = 1 \\ m_2 = -2 \end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện (*) ta thấy chỉ có nghiệm $m_2 = -2$ thỏa mãn. Vậy m = - 2 là giá trị cần tìm.

Câu 4:

a) Tứ giác BIEM có: $\widehat{IBM} = \widehat{IEM} = 90^0$ (gt); suy ra tứ giác BIEM nội tiếp đường tròn đường kính IM.

b) Tứ giác BIEM nội tiếp suy ra: $\widehat{IME} = \widehat{IBE} = 45^0$ (do ABCD là hình vuông).

c) ΔEBI và ΔECM có: $\widehat{IBE} = \widehat{MCE} = 45^0$, BE = CE, $\widehat{BEI} = \widehat{CEM}$ (do $\widehat{IEM} = \widehat{BEC} = 90^0$)

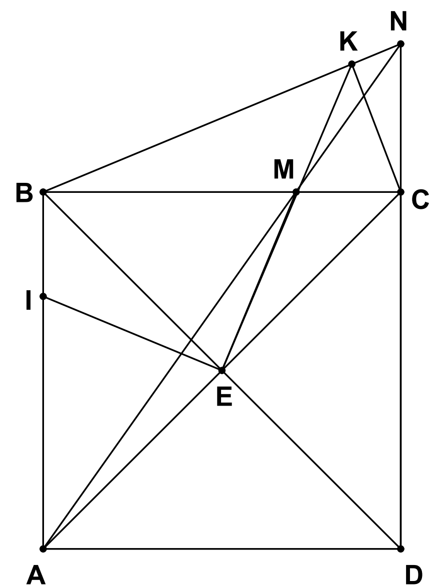
$\Rightarrow \Delta EBI = \Delta ECM$ (g-c-g) $\Rightarrow$ MC = IB; suy ra MB = IA

Vì CN // BA nên theo định lí Thalet, ta có: $\frac{MA}{MN} = \frac{MB}{MC} = \frac{IA}{IB}$. Suy ra IM song song với BN (định lí Thalet đảo)

$\Rightarrow \widehat{BKE} = \widehat{IME} = 45^0$ (2). Lại có $\widehat{BCE} = 45^0$ (do ABCD là hình vuông).

Suy ra $\widehat{BKE} = \widehat{BCE} \Rightarrow$ BKCE là tứ giác nội tiếp.

Suy ra: $\widehat{BKC} + \widehat{BEC} = 180^0$ mà $\widehat{BEC} = 90^0$; suy ra $\widehat{BKC} = 90^0$; hay $CK \perp BN$.



Câu 5:

Ta có: $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca)$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ (1).

Vì a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác nên ta có: $a^2 < a.(b+ c) \Rightarrow a^2 < ab + ac$.

Tương tự: $b^2 < ab + bc$; $c^2 < ca + bc$. Suy ra: $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

ĐỀ SỐ 5

Câu 1: a) $\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right).\sqrt{6} = \sqrt{\frac{3}{2}}.\sqrt{6} - \sqrt{\frac{2}{3}}.\sqrt{6} = \sqrt{\frac{3}{2}.6} - \sqrt{\frac{2}{3}.6} = 3 - 2 = 1$

b) Vì đường thẳng y = ax + b đi qua điểm A(2; 3) nên thay x = 2 và y = 3 vào phương trình đường thẳng ta được: 3 = 2a + b (1). Tương tự: 1 = -2a + b (2). Từ đó ta có hệ:

$\begin{cases} 2a + b = 3 \\ -2a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = 4 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = 2 \end{cases}.$

Câu 2: a) Giải phương trình: $x^2 - 3x + 1 = 0$. Ta có: $\Delta = 9 - 4 = 5$

Phương trình có hai nghiệm: $x_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$; $x_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

b) Điều kiện: $x \neq \pm 1$.

$\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{-2}{x+1} = \dfrac{4}{x^2-1} \Leftrightarrow \dfrac{x(x+1)}{x^2-1} + \dfrac{-2(x-1)}{x^2-1} = \dfrac{4}{x^2-1}$

$\Leftrightarrow x(x+1) - 2(x-1) = 4 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Câu 3: Gọi vận tốc của ô tô thứ nhất là x (km/h). Suy ra vận tốc của ô tô thứ hai là: $x - 10$ (km/h) (Đk: $x > 10$).

Thời gian để ô tô thứ nhất và ô tô thứ hai chạy từ A đến B lần lượt là $\dfrac{120}{x}$ (h) và $\dfrac{120}{x-10}$ (h).

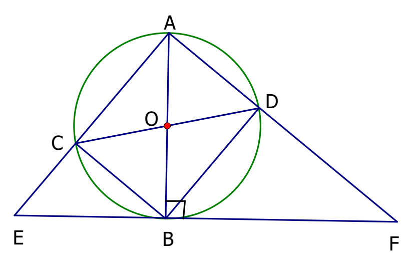
Theo bài ra ta có phương trình: $\dfrac{120}{x} = \dfrac{120}{x-10} - 0,4$

Giải ra ta được $x = 60$ (thỏa mãn).Vậy vận tốc của ô tô thứ nhất là 60 km/h và ô tô thứ hai là 50 km/h.

Câu 4:

a) Tứ giác ACBD có hai đường chéo AB và CD bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, suy ra ACBD là hình chữ nhật

b) Tứ giác ACBD là hình chữ nhật suy ra:



$\widehat{CAD} = \widehat{BCE} = 90^0$ (1). Lại có $\widehat{CBE} = \dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BC}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung); $\widehat{ACD} = \dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AD}$ (góc nội tiếp), mà $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AD}$ (do $BC = AD$) $\Rightarrow \widehat{CBE} = \widehat{ACD}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\Delta ACD \sim \Delta CBE$.

c) Vì ACBD là hình chữ nhật nên CB song song với AF, suy ra: $\widehat{CBE} = \widehat{DFE}$ (3). Từ (2) và (3) suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{DFE}$ do đó tứ giác CDFE nội tiếp được đường tròn.

d) Do CB // AF nên $\Delta CBE \sim \Delta AFE$, suy ra: $\dfrac{S_1}{S} = \dfrac{EB^2}{EF^2}$

$\Rightarrow \sqrt{\dfrac{S_1}{S}} = \dfrac{EB}{EF}$. Tương tự ta có $\sqrt{\dfrac{S_2}{S}} = \dfrac{BF}{EF}$. Từ đó suy ra: $\sqrt{\dfrac{S_1}{S}} + \sqrt{\dfrac{S_2}{S}} = 1 \Rightarrow \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} = \sqrt{S}$.

Câu 5: Đk: $x^3 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ (1).

Đặt: $a = \sqrt{x+1}$; $b = \sqrt{x^2 - x + 1}$,($a \geq 0$; $b>0$) (2) $\Rightarrow$ $a^2 + b^2 = x^2 + 2$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành: $10.ab = 3.(a^2 + b^2) \Leftrightarrow (a - 3b)(3a - b) = 0$

$\Leftrightarrow$ a = 3b hoặc b = 3a.

+) Nếu a = 3b thì từ (2) suy ra: $\sqrt{x+1} = 3\sqrt{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow 9x^2 - 10x + 8 = 0$ (vô nghiệm).

+) Nếu b = 3a thì từ (2) suy ra: $3\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow 9x + 9 = x^2 - x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 10x - 8 = 0$. Phương trình có hai nghiệm $x_1 = 5+\sqrt{33}$; $x_2 = 5-\sqrt{33}$ (thỏa mãn (1)).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1 = 5+\sqrt{33}$ và $x_2 = 5-\sqrt{33}$.

Lời bình:

Câu IV

1) Để chứng minh đẳng thức (*) về diện tích các tam giác (chẳng hạn $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} = \sqrt{S}$ (*))

Bạn có thể nghĩ đến một trong ba cách sau :

• Nếu ba tam giác tương ứng có một cạnh bằng nhau thì biến đổi (*) về đẳng thức các đường cao tương ứng h_1, h_2, h để chứng minh (chẳng hạn(*) $\Leftrightarrow$ $h_1 + h_2 = h$).

• Nếu ba tam giác tương ứng có một đường cao bằng nhau thì biến đổi (*) về đẳng thức các cạnh tương ứng a_1, a_2, a để chứng minh (chẳng hạn(*) $\Leftrightarrow$ $a_1 + a_2 = a$).

• Nếu hai trương hợp trên không xẩy ra thì biến đổi (*) về đẳng thức tỉ số diện tích để chứng minh (chẳng hạn(*) $\Leftrightarrow$ $\sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} = 1$). Thường đẳng thức về tỷ số diện tích tam giác là đẳng thức về tỉ số các cạnh tương ứng trong các cặp tam giác đồng dạng.

2) Trong bài toán trên, hai khả năng đầu không xảy ra. Điều đó dẫn chúng ta đến lời giải với các cặp tam giác đồng dạng.

Câu V

Để các bạn có cách nhìn khái quát, chúng tôi khai triển bài toán trên một bình diện mới.

Viết lại $10\sqrt{x^3+1} = 3(x^2 + 2) \Leftrightarrow 10\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)} = 3[(x + 1) + x^2 - x + 1]$ **(1)**

Phương trình (1) có dạng $\alpha.P(x) + \beta.Q(x) + \gamma.\sqrt{P(x)Q(x)} = 0$ $(\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0)$ **(2)**

(phương trình đẳng cấp đối với P(x) và Q(x)). Đặt $\sqrt{Q(x)} = t.\sqrt{P(x)}$, **(3)**

phương trình (1) được đưa về $\alpha t^2 + \gamma t + \beta = 0$. **(4)**

Sau khi tìm được t từ (4), thể vào (3) để tìm x.

ĐỀ SỐ 6

Câu 1:

a) $A = \left(2 + \dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right).\left(2 - \dfrac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\right) = \left(2 + \dfrac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{3}+1}\right)\left(2 - \dfrac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{3}-1}\right)$

$= \left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right) = 1.$

b) $\left(\dfrac{\sqrt{b}}{a - \sqrt{ab}} - \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{ab} - b}\right).\left(a\sqrt{b} - b\sqrt{a}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)} - \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}\right).\sqrt{ab}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)$

$= \dfrac{\sqrt{b}.\sqrt{ab}}{\sqrt{a}} - \dfrac{\sqrt{a}.\sqrt{ab}}{\sqrt{b}} = b - a.\ \left(a > 0, b > 0, a \neq b\right)$

Câu 2:

a) Đk: $x \neq 0$ và $y \neq 0$. (*)

Rút y từ phương trình (1) rồi thế vào phương trình (2) ta được:

$\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x+1} = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

+ Với x = 2, suy ra y = x + 1 = 3 (thoả mãn (*))

+ Với $x = -\dfrac{1}{2}$, suy ra $y = x + 1 = \dfrac{1}{2}$ (thoả mãn (*))

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm: (2; 3) và $\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.

b) Phương trình $x^2 - x - 3 = 0$ có các hệ số a, c trái dấu nên có hai nghiệm phân biệt x_1; x_2.

Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có: $x_1 + x_2 = 1$ và $x_1x_2 = -3$.

Do đó: $P = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 1 + 6 = 7$.

Câu 3:

a) Viết đường thẳng 2x + y = 3 về dạng y = - 2x + 3.

Vì đường thẳng y = ax + b song song với đường thẳng trên, suy ra a = - 2 (1)

Vì đường thẳng y = ax + b đi qua điểm M (2; $\dfrac{1}{2}$) nên ta có: $\dfrac{1}{2} = 2a + b$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra a = - 2 và $b = \dfrac{9}{2}$.

b) Gọi các kích thước của hình chữ nhật là x (cm) và y (cm)
(x; y > 0).

Theo bài ra ta có hệ phương trình: $\begin{cases} xy = 40 \\ \left(x+3\right)\left(y+3\right) = xy + 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 40 \\ x + y = 13 \end{cases}$.

Suy ra x, y là hai nghiệm của phương trình: $t^2 - 13t + 40 = 0$ (1).

Giải phương trình (1) ta được hai nghiệm là 8 và 5.

Vậy các kích thước của hình chữ nhật là 8 cm và 5 cm.

Câu 4:

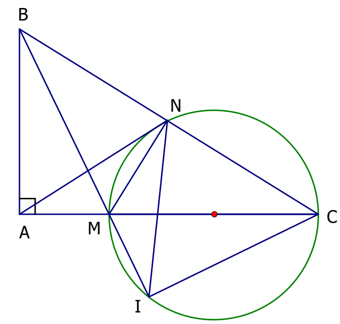
a) Ta có:

$\widehat{MAB} = 90^0$ (gt)(1). $\widehat{MNC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{MNB} = 90^0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ABNM là tứ giác nội tiếp.

Tương tự, tứ giác ABCI có: $\widehat{BAC} = \widehat{BIC} = 90^0$

$\Rightarrow$ ABCI là tứ giác nội tiếp đường tròn.



b) Tứ giác ABNM nội tiếp suy ra $\widehat{MNA} = \widehat{MBA}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AM) (3).

Tứ giác MNCI nội tiếp suy ra $\widehat{MNI} = \widehat{MCI}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MI) (4).

Tứ giác ABCI nội tiếp suy ra $\widehat{MBA} = \widehat{MCI}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AI) (5).

Từ (3),(4),(5) suy ra $\widehat{MNI} = \widehat{MNA} \Rightarrow$ NM là tia phân giác của $\widehat{ANI}$.

c) ΔBNM và ΔBIC có chung góc B và $\widehat{BNM} = \widehat{BIC} = 90^0 \Rightarrow \Delta BNM \sim \Delta BIC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BN}{BM} = \dfrac{BI}{BC} \Rightarrow\subset BM.BI = BN.BC$.

Tương tự ta có: CM.CA = CN.CB.

Suy ra: BM.BI + CM.CA = BC^2 (6).

Áp dụng định lí Pitago cho tam giác ABC vuông tại A ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ (7).

Từ (6) và (7) suy ra điều phải chứng minh.

Câu 5: $A = 2x - 2\sqrt{xy} + y - 2\sqrt{x} + 3$.

Trước hết ta thấy biểu thức A có nghĩa khi và chỉ khi: $\begin{cases} x \ge 0 \\ xy \ge 0 \end{cases}$ (1).

Từ (1) ta thấy nếu x = 0 thì y nhận mọi giá trị tùy ý thuộc R (2).

Mặt khác, khi x = 0 thì A = y + 3 mà y có thể nhỏ tùy ý nên A cũng có thể nhỏ tùy ý. Vậy biểu thức A không có giá trị nhỏ nhất.

Lời bình:

Câu IVc

a) Biết bao kí ức ùa về khi bắt gặp đẳng thức

$BM.BI + CM.CA = AB^2 + AC^2$. (1)

• *Phải chăng* $\begin{cases} BM.BI = AB^2 & (2) \\ CM.CA = AC^2 & (3) \end{cases}$ *Từ đó cộng theo từng vế để có (1).*

Nếu có (1) thì AB phải là cạnh chung một cặp tam giác đồng dạng. Tiếc rằng điều ấy không đúng. Tương tự cũng không có (2).

• ***Để ý*** $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ***vậy nên (1)*** $\Leftrightarrow$ $BM.BI + CM.CA = BC^2$ ***(3)***

Khả năng $\begin{cases} BM.BI = k.BC^2 \\ CM.CA = (1-k)BC^2 \end{cases}$ ***(với 0 < k < 1), từ đó cộng theo từng vế để có (1) cũng không xẩy ra vì BC không phải là cạnh chung của một cặp tam giác đồng dạng.***

• ***Để ý*** $BN + NC = BC$ ***vậy nên (1)*** $\Leftrightarrow$ $BM.BI + CM.CA = BC(BN + NC)$

$\Leftrightarrow$ $BM.BI + CM.CA = BC.BN + BC.NC$ ***(4)***

Điều ấy dẫn dắt chúng ta đến lời giải trên.

b) Mong thời gian đừng lãng quên phân tích : $PQ^2 = PQ(PK + KQ)$

là một cách để chứng minh đẳng thức dạng : $PX.PY + QM.QN = PQ^2$.

(ở đây K là một điểm thuộc đoạn thẳng PQ).

Câu V

△ Cảnh báo. Các bạn cùng theo dõi một lời giải sau :

Biểu thức A có nghĩa khi và chỉ khi $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$. ***Biến đổi*** $A = \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 + \left(\sqrt{x} - 1\right)^2 + 2$.

Suy ra minA = 2, đạt được khi x = y = 1 (!).

• ***Kết quả bài toán sai thì đã rõ. Nhưng cái sai về tư duy mới đáng bàn hơn.***

1) Điều kiện xác định của P(x; y) chứa đồng thời $\sqrt{x}$ ***và*** $\sqrt{xy}$ ***là*** $D = \begin{cases} x = 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \cup \begin{cases} x > 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Do vậy để tìm GTLN, GTNN P(x; y) cần phải xét độc lập hai trường hợp $\begin{cases} x = 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$ ***và*** $\begin{cases} x > 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

2) Không thể gộp chung $\begin{cases} x = 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \cup \begin{cases} x > 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ ***thành*** $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

3) Do cho rằng điều kiện xác định của P(x; y) là $D_{y \geq 0} = \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ ***(bỏ sót*** $D_{y<0} = \begin{cases} x = 0 \\ y < 0 \end{cases}$***)***

Vậy nên A = 2 là GNNN của A trên $D_{y \geq 0}$***, chưa đủ để kết luận đó là GTNN của A trên D.***

4) Nhân đây liên tưởng đến phương trình $P(x)\sqrt{Q(x)} = 0$. ***(1)***

Biến đổi đúng (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} Q(x)=0 \\ \begin{cases} Q(x)>0 \\ P(x)=0 \end{cases} \end{array}\right.$. ***Cách biến đổi sau là sai (1)*** $\Leftrightarrow \begin{cases} Q(x)\ge 0 \\ P(x)=0 \end{cases}$.

ĐỀ SỐ 7

Câu 1: a) Biểu thức A có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} x-1\ge 0 \\ 3-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1\le x\le 3$.

b) $\dfrac{1}{3-\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{5}+1}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)}-\dfrac{\sqrt{5}-1}{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}$

$=\dfrac{3+\sqrt{5}}{9-5}-\dfrac{\sqrt{5}-1}{5-1}=\dfrac{\left(3+\sqrt{5}\right)-\left(\sqrt{5}-1\right)}{4}=1$.

Câu 2: a) $(x-3)^2=4 \Leftrightarrow x-3=\pm 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = 5$; $x = 1$

b) Đk: $x \ne -\dfrac{1}{2}$.

$\dfrac{x-1}{2x+1}<\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{2x+1}-\dfrac{1}{2}<0 \Leftrightarrow \dfrac{(2x-2)-(2x+1)}{2(2x+1)}<0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-3}{2\left(2x+1\right)}<0 \Leftrightarrow 2x+1>0 \Leftrightarrow x>-\dfrac{1}{2}$.

Câu 3: a) Ta có $\Delta' = m^2 + 1 > 0, \forall m \in R$. Do đó phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Theo định lí Vi-ét thì: $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1.x_2 = -1$.

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1.x_2 = 7$

$\Leftrightarrow 4m^2 + 3 = 7 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

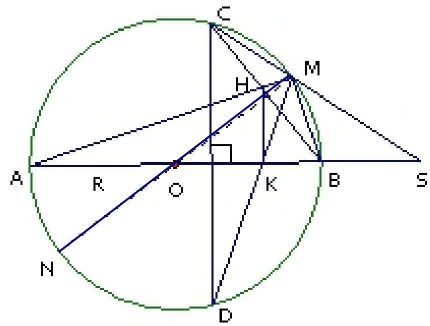
Câu 4:

a) ΔSBC và ΔSMA có:

$\widehat{BSC} = \widehat{MSA}$, $\widehat{SCB} = \widehat{SAM}$

(góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{MB}$).

$\Rightarrow \Delta SBC \sim \Delta SMA$.



b) Vì $AB \perp CD$ nên $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$.

Suy ra $\widehat{MHB} = \widehat{MKB}$ (vì cùng bằng $\frac{1}{2}(sd\overset{\frown}{AD} + sd\overset{\frown}{MB})$ $\Rightarrow$ tứ giác BMHK nội tiếp được đường tròn $\Rightarrow \widehat{HMB} + \widehat{HKB} = 180^0$ (1).

Lại có: $\widehat{HMB} = \widehat{AMB} = 90^0$ (2)

(góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{HKB} = 90^0$, do đó HK // CD (cùng vuông góc với AB).

c) Vẽ đường kính MN, suy ra $\overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{AN}$.

Ta có: $\widehat{OSM} = \widehat{ASC} = \frac{1}{2}$(sđ $\overset{\frown}{AC}$ - sđ $\overset{\frown}{BM}$); $\widehat{OMK} = \widehat{NMD} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{ND}$ = $\frac{1}{2}$ (sđ $\overset{\frown}{AD}$ - sđ $\overset{\frown}{AN}$);

mà $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$ và $\overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{AN}$ nên suy ra $\widehat{OSM} = \widehat{OMK}$

$\Rightarrow \Delta OSM \sim \Delta OMK$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{OS}{OM} = \dfrac{OM}{OK} \Rightarrow OK.OS = OM^2 = R^2$.

Câu 5: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 1 = 2y \ (1) \\ y^3 + 1 = 2x \ (2) \end{cases}$

Lấy pt (1) trừ pt (2) ta được: $x^3 – y^3 = 2(y – x)$

$\Leftrightarrow (x – y)(x^2 – xy + y^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow x – y = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(do $x^2 – xy + y^2 + 2 = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 2 > 0$)

Với x = y ta có phương trình: $x^3 – 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x – 1)(x^2 + x – 1) = 0 \Leftrightarrow$ $x = 1$; $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$; $x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Vậy hệ đã cho có 3 nghiệm là: $(1;1), \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right), \left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

ĐỀ SỐ 8

Câu 1:

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 3y = 15 \\ x - 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 14 \\ y = 5 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

b) Phương trình $3x^2 - x - 2 = 0$ có các hệ số a và c trái dấu nên luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2.

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = \frac{1}{3}$ và $x_1.x_2 = -\frac{2}{3}$.

Do đó P = $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{1}{3} : \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

Câu 2:

a) $A = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)}\right) : \frac{\sqrt{a}+1}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{(\sqrt{a}-1)}\right).(\sqrt{a}-1) = \sqrt{a}-1$

b) $A < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, a \neq 1 \\ \sqrt{a} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < 1$.

Câu 3: a) Với m = 0 ta có phương trình $x^2 - x + 1 = 0$

Vì $\Delta = -3 < 0$ nên phương trình trên vô nghiệm.

b) Ta có: $\Delta = 1 - 4(1 + m) = -3 - 4m$.

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -3 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow 4m \leq -3 \Leftrightarrow m \leq \frac{-3}{4}$ (1).

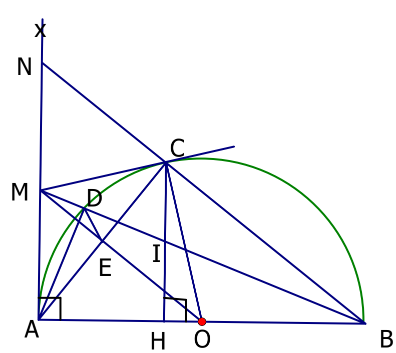
Theo hệ thức Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = 1$ và $x_1.x_2 = 1 + m$

Thay vào đẳng thức: $x_1x_2.(x_1x_2 - 2) = 3(x_1 + x_2)$, ta được:

$(1 + m)(1 + m - 2) = 3 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Đối chiếu với điều kiện (1) suy ra chỉ có m = -2 thỏa mãn.

Câu 4:



a) Vì MA, MC là tiếp tuyến nên: $\widehat{MAO} = \widehat{MCO} = 90^0 \Rightarrow$ AMCO là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính MO.

$\widehat{ADB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{ADM} = 90^0$ (1)

Lại có: OA = OC = R; MA = MC (tính chất tiếp tuyến). Suy ra OM là đường trung trực của AC

$\Rightarrow \widehat{AEM} = 90^0$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra MADE là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính MA.

b) Tứ giác AMDE nội tiếp suy ra: $\widehat{ADE} = \widehat{AME} = \widehat{AMO}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AE) (3)

Tứ giác AMCO nội tiếp suy ra: $\widehat{AMO} = \widehat{ACO}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AO) (4).

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{ADE} = \widehat{ACO}$

c) Tia BC cắt Ax tại N. Ta có $\widehat{ACB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{ACN} = 90^0$, suy ra ΔACN vuông tại C. Lại có MC = MA nên suy ra được MC = MN, do đó MA = MN (5).

Mặt khác ta có CH // NA (cùng vuông góc với AB) nên theo định lí Ta-lét thì $\frac{IC}{MN} = \frac{IH}{MA}\left(= \frac{BI}{BM}\right)$ (6).

Từ (5) và (6) suy ra IC = IH hay MB đi qua trung điểm của CH.

Câu 5: Vì b, c $\in [0;1]$ nên suy ra $b^2 \le b; c^3 \le c$. Do đó:

$a + b^2 + c^3 - ab - bc - ca \le a + b + c - ab - bc - ca$ (1).

Lại có: $a + b + c - ab - bc - ca = (a - 1)(b - 1)(c - 1) - abc + 1$ (2)

Vì a, b, c $\in [0\ ;\ 1]$ nên $(a - 1)(b - 1)(c - 1) \le 0\ ; -abc \le 0$

Do đó từ (2) suy ra $a + b + c - ab - bc - ca \le 1$ (3).

Từ (1) và (3) suy ra $a + b^2 + c^3 - ab - bc - ca \le 1$.

ĐỀ SỐ 9

Câu 1: a) Thay x = $\sqrt{3} + 2$ vào hàm số ta được:

$y = \left(\sqrt{3} - 2\right)\left(\sqrt{3} + 2\right) + 1 = \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2^2 + 1 = 0$.

b) Đường thẳng y = 2x – 1 cắt trục hoành tại điểm có hoành độ x = $\frac{1}{2}$; còn đường thẳng y = 3x + m cắt trục hoành tại điểm có hoành độ x = $-\frac{m}{3}$. Suy ra hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm trên trục hoành

$\Leftrightarrow -\frac{m}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{-3}{2}$.

Câu 2: a) $A = \left(\frac{3\sqrt{x} + 6}{x - 4} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}\right) : \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$

$= \left(\frac{3(\sqrt{x} + 2)}{\left(\sqrt{x} - 2\right)\left(\sqrt{x} + 2\right)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}\right) : \frac{\left(\sqrt{x} - 3\right)\left(\sqrt{x} + 3\right)}{\sqrt{x} - 3}$

$= \left(\frac{3 + \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}\right) . \frac{1}{\sqrt{x} + 3} = \frac{1}{\sqrt{x} - 2}$, với $x \ge 0, x \ne 4, x \ne 9$.

b) Điều kiện: $x \ne 3$ và $x \ne -2$ (1).

$(1) \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 5}{(x + 2)(x - 3)} = \frac{1}{x - 3} \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 5}{(x + 2)(x - 3)} = \frac{x + 2}{(x + 2)(x - 3)} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 5 = x + 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$. Giải ra ta được: $x_1 = 1$ (thỏa mãn); $x_2 = 3$ (loại do (1)).
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất x = 1.

Câu 3: a) Thay m = 1 vào hệ đã cho ta được:

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 2y = 2 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 7 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Vậy phương trình có nghiệm (1; 2).

b) Giải hệ đã cho theo m ta được:

$$\begin{cases} 3x - y = 2m - 1 \\ x + 2y = 3m + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 2y = 4m - 2 \\ x + 2y = 3m + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 7m \\ x + 2y = 3m + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ y = m + 1 \end{cases}$$

Nghiệm của hệ đã cho thỏa mãn $x^2 + y^2 = 10$

$\Leftrightarrow m^2 + (m + 1)^2 = 10 \Leftrightarrow 2m^2 + 2m - 9 = 0$.

Giải ra ta được: $m_1 = \dfrac{-1+\sqrt{19}}{2}; m_2 = \dfrac{-1-\sqrt{19}}{2}$.

Câu 4:

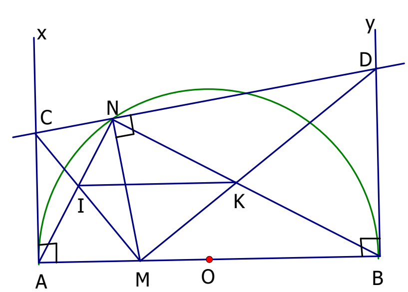
a) Tứ giác ACNM có: $\widehat{MNC} = 90^0$ (gt) $\widehat{MAC} = 90^0$ (tínhchất tiếp tuyến).

$\Rightarrow$ ACNM là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính MC. Tương tự tứ giác BDNM nội tiếp đường tròn đường kính MD.

b) ΔANB và ΔCMD có:

$\widehat{ABN} = \widehat{CDM}$ (do tứ giác BDNM nội tiếp)

$\widehat{BAN} = \widehat{DCM}$ (do tứ giác ACNM nội tiếp) $\Rightarrow \Delta ANB \sim \Delta CMD$ (g.g)



c) $\Delta ANB \sim \Delta CMD \Rightarrow \widehat{CMD} = \widehat{ANB} = 90^0$ (do $\widehat{ANB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)).

Suy ra $\widehat{IMK} = \widehat{INK} = 90^0 \Rightarrow$ IMKN là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính IK

$\Rightarrow \widehat{IKN} = \widehat{IMN}$ (1).

Tứ giác ACNM nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IMN} = \widehat{NAC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung NC) (2).

Lại có: $\widehat{NAC} = \widehat{ABN} = (\dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AN}$) (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{IKN} = \widehat{ABN} \Rightarrow$ IK // AB (đpcm).

Câu 5: Ta có: $\dfrac{a+b}{\sqrt{a(3a+b)}+\sqrt{b(3b+a)}}=\dfrac{2(a+b)}{\sqrt{4a(3a+b)}+\sqrt{4b(3b+a)}}$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho các số dương ta được:

$\sqrt{4a(3a+b)}\le\dfrac{4a+(3a+b)}{2}=\dfrac{7a+b}{2}\quad(2)$

$\sqrt{4b(3b+a)}\le\dfrac{4b+(3b+a)}{2}=\dfrac{7b+a}{2}\quad(3)$

Từ (2) và (3) suy ra: $\sqrt{4a(3a+b)}+\sqrt{4b(3b+a)}\le 4a+4b\quad(4)$

Từ (1) và (4) suy ra:

$\dfrac{a+b}{\sqrt{a(3a+b)}+\sqrt{b(3b+a)}}\ge\dfrac{2(a+b)}{4a+4b}=\dfrac{1}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi a = b.

☒**Lời nhắn**

Câu V

Các bạn được sử dụng bất đẳng thức Cô-si để làm toán như một định lý (không phải chứng minh)
Bất đẳng thức Cô-si chỉ áp dụng cho các số không âm. Cụ thể là :

+ Với hai số $a\ge 0$, $b\ge 0$ ta có $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$, ***dấu đẳng thức có khi và chỉ khi a = b.***

+ Với ba số $a\ge 0$, $b\ge 0$, $c\ge 0$ ta có $\dfrac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}$, ***dấu đẳng thức có khi và chỉ khi a = b = c.***

ĐỀ SỐ 10

Câu 1:

a) $A=3\sqrt{8}-\sqrt{50}-\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=6\sqrt{2}-5\sqrt{2}-|\sqrt{2}-1|=\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)=1$

b) $B=\dfrac{2}{x-1}.\sqrt{\dfrac{x^2-2x+1}{4x^2}}=\dfrac{2}{x-1}\sqrt{\dfrac{(x-1)^2}{2^2x^2}}=\dfrac{2}{x-1}.\dfrac{|x-1|}{2|x|}$

Vì $0<x<1$ nên $|x-1|=-(x-1)$; $|x|=x\Rightarrow B=\dfrac{-2(x-1)}{2x(x-1)}=-\dfrac{1}{x}$.

Câu 2: a) $\begin{cases}2(x-1)+y=3\\x-3y=-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=5\\2x-6y=-16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=5\\7y=21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$

b) $x+3\sqrt{x}-4=0$

Đặt $\sqrt{x} = t\ (t \geq 0)$ (1)

Khi đó phương trình đã cho trở thành: $t^2 + 3t - 4 = 0$ (2)

Phương trình (2) có tổng các hệ số bằng 0; suy ra (2) có hai nghiệm: $t_1 = 1$ (thỏa mãn (1)); $t_2 = -4$ (loại do (1)).

Thay $t_1 = 1$ vào (1) suy ra x = 1 là nghiệm của phương trình đã cho.

Câu 3: Gọi x là số sản phẩm loại I mà xí nghiệp sản xuất được trong 1 giờ($x > 0$).

Suy ra số sản phẩm loại II sản xuất được trong một giờ là x + 10.

Thời gian sản xuất 120 sản phẩm loại I là $\frac{120}{x}$ (giờ)

Thời gian sản xuất 120 sản phẩm loại II là $\frac{120}{x+10}$ (giờ)

Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{120}{x} + \frac{120}{x+10} = 7$ (1)

Giải phương trình (1) ta được $x_1 = 30$ (thỏa mãn); $x_2 = \frac{-40}{7}$ (loại).

Vậy mỗi giờ xí nghiệp sản xuất được 30 sản phẩm loại I và 40 sản phẩm loại II.

Câu 4:

a) Ta có $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ABD}$ lần lượt là các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O) và (O/)

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ABD} = 90^0$

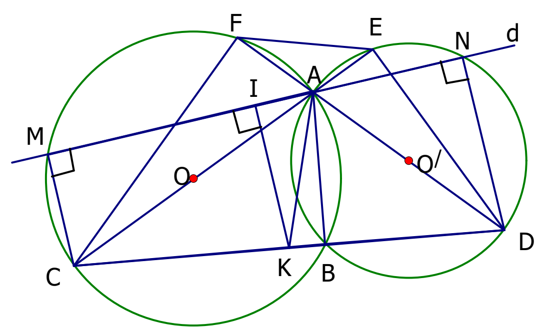
Suy ra C, B, D thẳng hàng.

b) Xét tứ giác CDEF có:

$\widehat{CFD} = \widehat{CFA} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$\widehat{CED} = \widehat{AED} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O/)

$\Rightarrow \widehat{CFD} = \widehat{CED} = 90^0$ suy ra CDEF là tứ giác nội tiếp.



c) Ta có $\widehat{CMA} = \widehat{DNA} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn); suy ra CM // DN hay CMND là hình thang.

Gọi I, K thứ tự là trung điểm của MN và CD.

Khi đó IK là đường trung bình của hình thang CMND. Suy ra IK // CM // DN (1) và CM + DN = 2.IK (2)

Từ (1) suy ra IK $\perp$ MN $\Rightarrow$ IK $\leq$ KA (3) (KA là hằng số do A và K cố định).

Từ (2) và (3) suy ra: CM + DN $\leq$ 2KA. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi IK = AK $\Leftrightarrow$ d $\perp$ AK tại A.

Vậy khi đường thẳng d vuông góc AK tại A thì (CM + DN) đạt giá trị lớn nhất bằng 2KA.

Câu 5: Ta có:

$\left(x + \sqrt{x^2 + 2011}\right)\left(y + \sqrt{y^2 + 2011}\right) = 2011$ (1) (gt)

$\left(x+\sqrt{x^2+2011}\right)\left(x-\sqrt{x^2+2011}\right)=-2011$ (2)

$\left(y+\sqrt{y^2+2011}\right)\left(y-\sqrt{y^2+2011}\right)=-2011$ (3)

Từ (1) và (2) suy ra:

$\left(y+\sqrt{y^2+2011}\right)=-\left(x-\sqrt{x^2+2011}\right)$ (4)

Từ (1) và (3) suy ra:

$\left(x+\sqrt{x^2+2011}\right)=-\left(y-\sqrt{y^2+2011}\right)$ (5)

Cộng (4) và (5) theo từng vế và rút gọn ta được:

$x + y = -(x + y) \Rightarrow 2(x + y) = 0 \Rightarrow x + y = 0.$

ĐỀ SỐ 11

Câu 1: 1) Rút gọn

$$A=\left[\frac{\left(1-\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt{a}+a\right)}{1-\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right]\left[\frac{1-\sqrt{a}}{\left(1-\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt{a}\right)}\right]^2$$

$$=\left(1+2\sqrt{a}+a\right).\frac{1}{\left(1+\sqrt{a}\right)^2}=\left(1+\sqrt{a}\right)^2.\frac{1}{\left(1+\sqrt{a}\right)^2}=1.$$

2) Giải phương trình: $2x^2 - 5x + 3 = 0$

Phương trình có tổng các hệ số bằng 0 nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{2}$.

Câu 2: 1) Hàm số nghịch biến khi trên R khi và chỉ khi $3 - k < 0 \Leftrightarrow k > 3$

2) Giải hệ: $\begin{cases}4x+y=5\\3x-2y=-12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8x+2y=10\\3x-2y=-12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}11x=-2\\4x+y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{-2}{11}\\y=\dfrac{63}{11}\end{cases}$

Câu 3: 1) Phương trình có 2 nghiệm trái dấu khi: $m < 0$

2) Phương trình có 2 nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' = 9 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 9$

Theo hệ thứcViét ta có $\begin{cases}x_1+x_2=6 & (1)\\x_1\,.\,x_2=m & (2)\end{cases}$

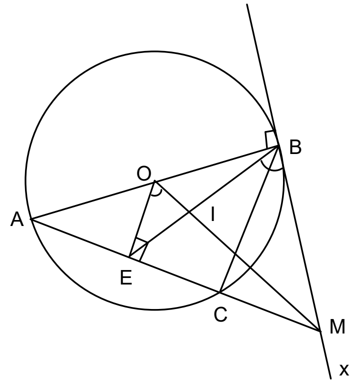
Theo yêu cầu của bài ra $x_1 - x_2 = 4$ (3)

Từ (1) và (3) $\Rightarrow x_1 = 5$, thay vào (1) $\Rightarrow x_2 = 1$

Suy ra $m = x_1.x_2 = 5$ (thoả mãn)

Vậy m = 5 là giá trị cần tìm.

Câu 4:



a) Ta có E là trung điểm của AC $\Rightarrow$ OE $\perp$ AC hay $\widehat{OEM} = 90^0$.

Ta có Bx $\perp$ AB $\Rightarrow$ $\widehat{ABx} = 90^0$.

nên tứ giác CBME nội tiếp.

b) Vì tứ giác OEMB nội tiếp $\Rightarrow$

$\widehat{OMB} = \widehat{OEB}$ (cung chắn $\widehat{OB}$),

$\widehat{EOM} = \widehat{EBM}$ (cùng chắn cung EM)

$\Rightarrow$ Δ EIO ~ Δ MIB (g.g) $\Rightarrow$ IB.IE = M.IO

Câu 5: Ta có : $P = 3x + 2y + \frac{6}{x} + \frac{8}{y} = (\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y) + (\frac{3}{2}x + \frac{6}{x}) + (\frac{y}{2} + \frac{8}{y})$

Do $\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y = \frac{3}{2}\left(x + y\right) \geq \frac{3}{2} . 6 = 9$.

$\frac{3x}{2} + \frac{6}{x} \geq 2\sqrt{\frac{3x}{2} . \frac{6}{x}} = 6$, $\frac{y}{2} + \frac{8}{y} \geq 2\sqrt{\frac{y}{2} . \frac{8}{y}} = 4$

Suy ra $P \geq 9 + 6 + 4 = 19$

Dấu bằng xẩy ra khi $\begin{cases} x + y = 6 \\ \frac{3x}{2} = \frac{6}{x} \\ \frac{y}{2} = \frac{8}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$

Vậy min P = 19.

Lời bình:

Câu V

• Việc tìm GTNN của biểu thức P bao giờ cũng vận hành theo sơ đồ "bé dần": P ≥ B, (trong tài liệu này chúng tôi sử dụng B - chữ cái đầu của chữ bé hơn).

1) Do giả thiết cho x + y ≥ 6, đã thuận theo sơ đồ "bé dần": P ≥ B, điều ấy mách bảo ta biểu thị P theo (x + y). Để thực hiện được điều ấy ta phải khử $\frac{6}{x}$ và $\frac{8}{y}$.

Do có x > 0; y > 0 nên việc khử được thực hiện dễ dàng bằng cách áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho các từng cặp số Ax và $\frac{6}{x}$, By và $\frac{8}{y}$.

Bởi lẽ đó mà lời giải đã "khéo léo" tách $3x = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}x$, $2y = \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}y$.

2) Tuy nhiên mấu chốt lời giải nằm ở sự "khéo léo" nói trên. Các số $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$ được nghĩ ra bằng cách nào?

Với mọi số thực a < 2, ta có

$$P = 3x + 2y + \frac{6}{x} + \frac{8}{y} = a(x+y) + \left[(3-a)x + \frac{6}{x}\right] + \left[(2-a)y + \frac{8}{y}\right] \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad P \geq 6a + 2\sqrt{6(3-a)} + 2\sqrt{8(2-a)} \qquad (2)$$

Ta có $(3-a)x + \frac{6}{x} \geq 2\sqrt{6(3-a)}$***, dấu đẳng thức có khi*** $x = \sqrt{\frac{6}{3-a}}$ ***;*** (3)

$(2-a)y + \frac{8}{y} \geq 2\sqrt{8(2-a)}$***, dấu đẳng thức có khi*** $y = \sqrt{\frac{8}{2-a}}$***. ;*** (4)

Để (2) trở thành đẳng thức buộc phải có x + y = 6 $\Rightarrow \sqrt{\frac{6}{3-a}} + \sqrt{\frac{8}{2-a}} = 6$

(5)

Thấy rằng $a = \frac{3}{2}$ ***là một nghiệm của (5). Thay*** $a = \frac{3}{2}$ ***vào (2) ta có sự phân tích như lời giải đã trình bày. Các số $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$ được nghĩ ra như thế đó.***

3) Phương trình (3) là phương trình "kết điểm rơi". Người ta không cần biết phương trình "kết điểm rơi" có bao nhiêu nghiệm. Chỉ cần biết (có thể là đoán) được một nghiệm của nó là đủ cho lời giải thành công. (Việc giải phương trình "kết điểm rơi" nhiều khi phức tạp và cũng không cần thiết.)

ĐỀ SỐ 12

Câu 1: Rút gọn biểu thức

1) $A = \sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72} = \sqrt{5 \cdot 4} - \sqrt{9 \cdot 5} + 3\sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{36 \cdot 2}$

$= 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 9\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 15\sqrt{2} - \sqrt{5}$

2) $B = \left(1 + \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1}\right)\left(1 + \frac{a - \sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}}\right)$ với $a \geq 0, \ a \neq 1$

$$= \left(1 + \frac{\sqrt{a}\,(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}+1}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{a}\,(\sqrt{a}-1)}{\sqrt{a}-1}\right) = (1+\sqrt{a})\,(1-\sqrt{a}) = 1 - a$$

Câu 2: 1) Đồ thị hàm số đi qua điểm M (- 2; -12) nên ta có: $- 12 = a\,.\,(- 2)^2 \Leftrightarrow 4a = -12$
$\Leftrightarrow a = - 3$. Khi đó hàm số là $y = - 3x^2$.
2) a) Với m = 5 ta có phương trình: $x^2 + 12x + 25 = 0$.
$\Delta' = 6^2 - 25 = 36 - 25 = 11$
$x_1 = - 6 - \sqrt{11}$; $x_2 = - 6 + \sqrt{11}$
b) Phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi:

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - m^2 > 0 \Leftrightarrow 2m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{-1}{2} \quad (*)$$

Phương trình có nghiệm x = - 2 $\Leftrightarrow 4 - 4\,(m + 1) + m^2 = 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 4 \end{array}\right. \text{(thoả mãn điều kiện (*))}$$

Vậy m = 0 hoặc m = 4 là các giá trị cần tìm.

Câu 3:

Gọi chiều dài của thửa ruộng là x, chiều rộng là y. (x, y > 0, x tính bằng m)

Diện tích thửa ruộng là x.y

Nếu tăng chiều dài thêm 2m, chiều rộng thêm 3 m thì diện tích thửa ruộng lúc này là: (x + 2) (y + 3)

Nếu giảm cả chiều dài và chiều rộng 2m thì diện tích thửa ruộng còn lại là (x-2) (y-2).

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x+2)\,(y+3) = xy + 100 \\ (x-2)\,(y-2) = xy - 68 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy + 3x + 2y + 6 = xy + 100 \\ xy - 2x - 2y + 4 = xy - 68 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 94 \\ 2x + 2y = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 22 \\ x + y = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 22 \\ y = 14 \end{cases}.$$

Vậy diện tích thửa ruộng là: S = 22 .14= 308 (m^2).

Câu 4: 1) Ta có $\widehat{BAC} = 90^0$ (gt)

$\widehat{MDC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

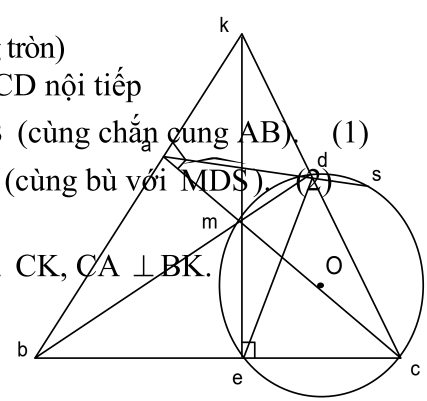
A, D nhìn BC dưới góc 90^0, tứ giác ABCD nội tiếp

Vì tứ giác ABCD nội tiếp.$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ (cùng chắn cung AB). (1)

Ta có tứ giác DMCS nội tiếp$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ACS}$ (cùng bù với $\widehat{MDS}$). (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{ACS}$.

2) Giả sử BA cắt CD tại K. Ta có BD $\perp$ CK, CA $\perp$ BK.



$\Rightarrow$ M là trực tâm ΔKBC. Mặt khác $\widehat{MEC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
$\Rightarrow$ K, M, E thẳng hàng, hay BA, EM, CD đồng quy tại K.

3) Vì tứ giác ABCD nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{DBC}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{DC}$). (3)

Mặt khác tứ giác BAME nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MAE} = \widehat{MBE}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{ME}$). (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{DAM} = \widehat{MAE}$ hay AM là tia phân giác $\widehat{DAE}$.

Chứng minh tương tự: $\widehat{ADM} = \widehat{MDE}$ hay DM là tia phân giác $\widehat{ADE}$.
Vậy M là tâm đường tròn nội tiếp ΔADE.

Câu 5: Ta có: $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$, $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$
Điều kiện: $x \ge 2$ (*)

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(x-2)} - \sqrt{(x-1)(x+3)} + \sqrt{x+3} - \sqrt{x-2} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\,(\sqrt{x-2} - \sqrt{x+3}) - (\sqrt{x-2} - \sqrt{x+3}) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-2} - \sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt{x-1} - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-2} = \sqrt{x+3} \quad (VN) \\ \sqrt{x-1} - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 2$ (thoả mãn đk (*))

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là x = 2.

Lời bình:
Câu IVb

Để chứng minh ba đường thẳng đồng quy, một phương pháp thường dùng là chứng minh ba đường thẳng ấy hoặc là ba đường cao, hoặc là ba đường trung tuyến, hoặc là ba đường phân giác của một tam giác.

ĐỀ SỐ 13

Câu 1:
1) Điều kiện: $a \ge 0$, $a \ne 1$, $a \ne 2$

Ta có: $P = \left[\dfrac{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(a+\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)} - \dfrac{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(a-\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+1\right)}\right] : \dfrac{a+2}{a-2}$

$= \dfrac{a+\sqrt{a}+1-a+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}} : \dfrac{a+2}{a-2} = \dfrac{2(a-2)}{a+2}$

2) Ta có: $P = \dfrac{2a-4}{a+2} = \dfrac{2a+4-8}{a+2} = 2 - \dfrac{8}{a+2}$

P nhận giá trị nguyên khi và chỉ khi $8 \,\vdots\, (a+2)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+2=\pm 1 \\ a+2=\pm 2 \\ a+2=\pm 4 \\ a+2=\pm 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1;\ a=-3 \\ a=0\ \ ;\ a=-4 \\ a=2\ \ ;\ a=-6 \\ a=6\ \ ;\ a=-10 \end{array}\right.$$

Câu 2:

1) Đường thẳng đi qua điểm M (1; -1) khi a + (2a - 1) . (- 1) + 3 = 0

$\Leftrightarrow$ a - 2a + 4 = 0 $\Leftrightarrow$ a = 4

Suy ra đường thẳng đó là $4x + 7y + 3 = 0 \Leftrightarrow 7y = -4x - 3 \Leftrightarrow y = \frac{-4}{7}x - \frac{3}{7}$

nên hệ số góc của đường thẳng là $\frac{-4}{7}$

2) a) Phương trình có nghiệm x = 0 nên: $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

b) Phương trình có 2 nghiệm khi:

$\Delta' = m^2 - (m-1)(m+1) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - m^2 + 1 \geq 0$, đúng $\forall$ m.

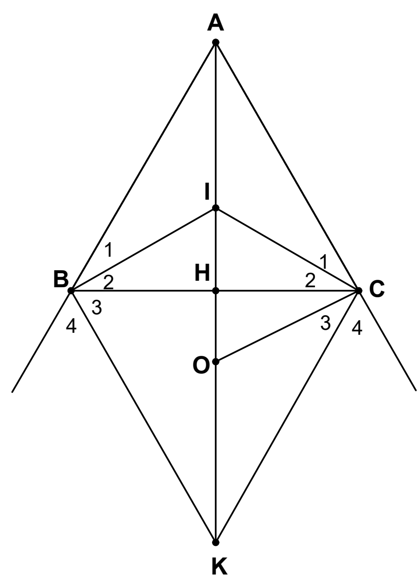
Ta có $x_1.x_2 = 5 \Leftrightarrow \frac{m+1}{m-1} = 5 \Leftrightarrow m + 1 = 5m - 5 \Leftrightarrow 4m = 6 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$.

Với $m = \frac{3}{2}$ ta có phương trình : $\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$

Khi đó $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 6$

Câu 3: Hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 7y = 18 \\ 21x - 7y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x = 25 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$.

Câu 4:



1) Theo giả thiết ta có: $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$, $\widehat{B_3} = \widehat{B_4}$

Mà $\widehat{B_1} + \widehat{B_2} + \widehat{B_3} + \widehat{B_4} = 180^0$

$\widehat{B_2} + \widehat{B_3} = 90^0$

Tương tự $\widehat{C_2} + \widehat{C_3} = 90^0$

Xét tứ giác BICK có $\widehat{B} + \widehat{C} = 180^0$

$\Rightarrow$ 4 điểm B, I, C, K thuộc đường tròn tâm O đường kính IK.

2) Nối CK ta có OI = OC = OK (vì ΔICK vuông tại C) $\Rightarrow$ Δ IOC cân tại O

$\Rightarrow \widehat{OIC} = \widehat{ICO}$. (1)

Ta lại có $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$ (gt). Gọi H là giao điểm của AI với BC.

Ta có AH $\perp$ BC. (Vì Δ ABC cân tại A).

Trong Δ IHC có $\widehat{HIC} + \widehat{ICH} = 90^0 \Rightarrow \widehat{OCI} + \widehat{ICA} = 90^0$.

Hay $\widehat{ACO} = 90^0$ hay AC là tiếp tuyến của đường tròn tâm (O).

3) Ta có BH = CH = 12 (cm).

Trong Δ vuông ACH có $AH^2 = AC^2 - CH^2 = 20^2 - 12^2 = 256 \Rightarrow AH = 16$

Trong tam giác ACH, CI là phân giác góc C ta có:

$$\frac{IA}{IH} = \frac{AC}{CH} \Rightarrow \frac{AH - IH}{IH} = \frac{AC}{CH} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} \Rightarrow (16 - IH).3 = 5.IH \Rightarrow IH = 6$$

Trong Δ vuông ICH có $IC^2 = IH^2 + HC^2 = 6^2 + 12^2 = 180$

Trong Δ vuông ICK có $IC^2 = IH . IK$

$$\Rightarrow IK = \frac{IC^2}{IH} = \frac{180}{6} = 30 \text{ , } OI = OK = OC = 15 \text{ (cm)}$$

Câu 5:

Ta có $x^2 + \sqrt{x + 2010} = 2010$ (1) Điều kiện: $x \geq -2010$

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} - x - 2010 + \sqrt{x + 2010} - \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{x + 2010} - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x + \frac{1}{2} = \sqrt{x + 2010} - \frac{1}{2}. & (2) \\ x + \frac{1}{2} = -\sqrt{x + 2010} + \frac{1}{2}. & (3) \end{array}\right.$$

Giải (2) : $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ (x+1)^2 = x + 2010 \quad (4) \end{cases}$

$(4) \Leftrightarrow (x + 1)^2 = x + 2010 \Leftrightarrow x^2 + x - 2009 = 0$

$\Delta = 1 + 4 . 2009 = 8037$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{8037}}{2} \text{ ; } x_2 = \frac{-1 - \sqrt{8037}}{2} \text{ (loại)}$$

Giải (3): $(3) \Leftrightarrow x = -\sqrt{x + 2010} \Leftrightarrow \begin{cases} -2010 \leq x \leq 0 \\ x^2 = x + 2010 \quad (5) \end{cases}$

$(5) \Leftrightarrow x^2 - x - 2010 = 0 . \Delta = 1 + 4 . 2010 = 8041$,

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{8041}}{2} \text{ ; } x_2 = \frac{1 - \sqrt{8041}}{2} \text{ (loại nghiệm } x_1\text{)}$$

Vậy phương tình có 2 nghiệm: $x = \dfrac{-1 + \sqrt{8037}}{2}; x = \dfrac{1 - \sqrt{8041}}{2}$.

Lời bình:
Câu V

- ***Bằng cách thêm bớt $(x+\frac{1}{4})$, sự nhạy cảm ấy đã trình bày lời giải ngắn gọn.***
- ***Không cần một sự khéo léo nào cả, bạn cũng có một lời giải trơn tru theo cách sau :***

Đặt $\sqrt{x+2010}=-y$, y ≥ 0 bài toán được đưa về giải hệ $\begin{cases} x^2 = y+2010 \\ y^2 = x+2010 \end{cases}$.

Đây là hệ phương trình hệ đối xứng kiểu 2 quen thuộc đã biết cách giải.

Chú ý : Phương trình đã cho có dạng

$$(ax+b)^2 = p\sqrt{a'x+b'} + qx + r, \ (a \neq 0, a' \neq 0, p \neq 0)$$

$$\textbf{Đặt :} \left[\begin{array}{l} \sqrt{a'x+b'} = ay+b, \text{ khi } pa' > 0; \\ \sqrt{a'x+b'} = ay+b, \text{ khi } pa' < 0. \end{array}\right.$$

Thường phương trình trở thành hệ đối xứng kiểu 2.

SỐ 14

Câu 1: 1) Ta có : $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{2+5\sqrt{x}}{x-4}$

$$P = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2) - 2 - 5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} =$$

$$= \frac{x+3\sqrt{x}+2+2x-4\sqrt{x}-2-5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$= \frac{3x-6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$

2) P = 2 khi $\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = 2 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = 2\sqrt{x}+4 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16$

Câu 2: 1) d song song với trục Ox khi và chỉ khi $\begin{cases} m-1=0 \\ n \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ n \neq 0 \end{cases}$.

2) Từ giả thiết, ta có: $\begin{cases} m-1=-3 \\ -1=m-1+n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-2 \\ n=2 \end{cases}$.

Vậy đường thẳng d có phương trình: $y=-3x+2$

Câu 3: 1) Với m = - 3 ta có phương trình: $x^2+8x=0 \Leftrightarrow x(x+8)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-8 \end{array}\right.$

2) Phương trình (1) có 2 nghiệm khi:

$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow \ (m - 1)^2 + (m + 3) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 + m + 3 \geq 0$

$\Leftrightarrow m^2 - m + 4 > 0 \Leftrightarrow \ (m - \frac{1}{2})^2 + \frac{15}{4} > 0$ đúng $\forall m$

Chứng tỏ phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\forall$ m

Theo hệ thức Vi ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m - 1) & (1) \\ x_1 - x_2 = - m - 3 & (2) \end{cases}$

Ta có $x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10 \Leftrightarrow 4\,(m - 1)^2 + 2\,(m + 3) = 10$

$\Leftrightarrow \ 4m^2 - 6m + 10 = 10 \Leftrightarrow \ 2m\,(2m - 3) = 0 \ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \frac{3}{2} \end{array}\right.$

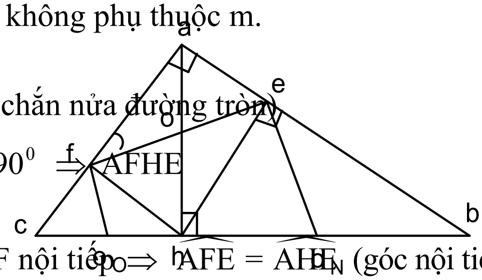
3) Từ (2) ta có $m = -x_1x_2 - 3$ thế vào (1) ta có:

$x_1 + x_2 = 2\,(- x_1x_2 - 3 - 1) = - 2x_1x_2 - 8$

$\Leftrightarrow \ x_1 + x_2 + 2x_1x_2 + 8 = 0$

Đây là hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc m.

Câu 4: 1) Từ giả thiết suy ra



$\widehat{CFH} = 90^0, \ \widehat{HEB} = 90^0$. (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Trong tứ giác AFHE có: $\widehat{A} = \widehat{F} = \widehat{E} = 90^0 \ \Rightarrow$ AFHE là hình chữ nhật.

2) Vì AEHF là hình chữ nhật $\Rightarrow$ AEHF nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{AHE}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AE}$) (1)

Ta lại có $\widehat{AHE} = \widehat{ABH}$ (góc có cạnh tương ứng $\perp$) (2)

Từ (1) và (2)

$\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{ABH}$ mà $\widehat{CFE} + \widehat{AFE} = 180^0$

$\Rightarrow \ \widehat{CFE} + \widehat{ABH} = 180^0$. Vậy tứ giác BEFC nội tiếp.

3) Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn đường kính HB và đường kính HC.

Gọi O là giao điểm AH và EF. Vì AFHE là hình chữ nhật. $\Rightarrow$ OF = OH $\Rightarrow \Delta$ FOH cân tại O $\Rightarrow \widehat{OFH} = \widehat{OHF}$. Vì Δ CFH vuông tại F $\Rightarrow$ $O_2C = O_2F = O_2H \Rightarrow \Delta\ HO_2F$ cân tại O_2. $\Rightarrow \widehat{O_2FH} = \widehat{O_2HF}$ mà $\widehat{O_2HF} + \widehat{FHA} = 90^0$. $\Rightarrow \widehat{O_2FH} + \widehat{HFO} = 90^0$. Vậy EF là tiếp tuyến của đường tròn tâm O_2.

Chứng minh tương tự EF là tiếp tuyến của đường tròn tâm O_1.

Vậy EF là tiếp tuyến chung của 2 nửa đường tròn.

Câu 5: Tìm GTLN, GTNN của x thoả mãn.

$\begin{cases} x + a + b + c = 7 & (1) \\ x^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 13 & (2) \end{cases}$

Từ (1) $\Rightarrow$ a + b + c = 7 - x.. Từ (2) $\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 13 - x^2$.

Ta chứng minh: $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$.

$\Leftrightarrow\ 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - a^2 - b^2 - c^2 - 2ab - 2ac - 2bc \geq 0$

$\Leftrightarrow\ (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$ (đpcm)

Suy ra $3(13 - x^2) \geq (7 - x)^2$. $\Leftrightarrow\ 3(13 - x^2) \geq 49 - 14x + x^2$.

$\Leftrightarrow 4x^2 - 14x + 10 \leq 0 \Leftrightarrow\ 1 \leq x \leq \frac{5}{2}$.

$x = \frac{5}{2}$ khi $a = b = c = \frac{3}{2}$, $x = 1$ khi $a = b = c = 2$.

Vậy $\max x = \frac{5}{2}$, $\min x = 1$.

ĐỀ SỐ 15

Câu 1: a) $M = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{x - \sqrt{x}}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 1} + \frac{2}{x - 1}\right)$

$= \left[\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x} - 1)}\right] : \left[\frac{\sqrt{x} - 1}{\left(\sqrt{x} - 1\right)\left(\sqrt{x} + 1\right)} + \frac{2}{\left(\sqrt{x} - 1\right)\left(\sqrt{x} + 1\right)}\right]$

$= \frac{x - 1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 1\right)} : \frac{\sqrt{x} + 1}{\left(\sqrt{x} - 1\right)\left(\sqrt{x} + 1\right)} = \frac{x - 1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 1\right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{x} - 1\right)\left(\sqrt{x} + 1\right)}{\sqrt{x} + 1}$

$= \frac{x - 1}{\sqrt{x}}$.

b) $M > 0 \Leftrightarrow\ x - 1 > 0$ (vì $x > 0$ nên $\sqrt{x} > 0$) $\Leftrightarrow\ x > 1$. (thoả mãn)

Câu 2: a) Ta thấy: $a = 1$; $b = -2m$; $c = -1$, rõ ràng: $a.\ c = 1\ .\ (-1) = -1 < 0$

$\Rightarrow$ phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

b) Vì phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt. Theo hệ thức Vi-ét, ta có:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2m \\ x_1.\ x_2 = \frac{c}{a} = -1 \end{cases}$ do đó: $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7 \Leftrightarrow\ \left(x_1 + x_2\right)^2 - 3x_1x_2 = 7$

$\Leftrightarrow\ (2m)^2 - 3\ .\ (-1) = 7 \Leftrightarrow\ 4m^2 = 4 \Leftrightarrow\ m^2 = 1 \Leftrightarrow\ m = \pm\ 1$.

Câu 3: Gọi x (chiếc) là số xe lúc đầu (x nguyên, dương)

Số xe lúc sau là: x + 3 (chiếc)

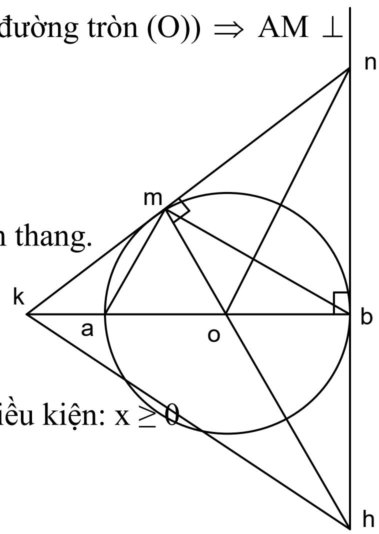
Lúc đầu mỗi xe chở: $\frac{480}{x}$ (tấn hàng), sau đó mỗi xe chở: $\frac{480}{x+3}$ (tấn hàng)

Ta có phương trình: $\frac{480}{x} - \frac{480}{x+3} = 8 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 180 = 0$

Giải phương trình ta được $x_1 = -15$ (loại); $x_2 = 12$ (TMĐK)

Vậy đoàn xe lúc đầu có 12 chiếc.

Câu 4: a) $\widehat{AMB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) $\Rightarrow$ AM $\perp$ MB (1)



MN = BN (t/c 2 tiếp tuyến cắt nhau), OM = OB

$\Rightarrow$ ON là đường trung trực của đoạn thẳng MB

$\Rightarrow$ ON $\perp$ MB (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ AM // ON $\Rightarrow$ OAMN là hình thang.

b) Δ NHK có HM $\perp$ NK; KB $\perp$ NH.

suy ra O là trực tâm ΔNHK $\Rightarrow$ ON $\perp$ KH (3)

Từ (2) và (3) $\Rightarrow$ KH // MB

Câu 5: $5x - 2\sqrt{x}(2 + y) + y^2 + 1 = 0$ (1). Điều kiện: $x \geq 0$

Đặt $\sqrt{x} = z$, $z \geq 0$, ta có phương trình:

$5z^2 - 2(2 + y)z + y^2 + 1 = 0$

Xem (2) là phương trình bậc hai ẩn z thì phương trình có nghiệm khi $\Delta' \geq 0$

$\Delta' = (2 + y)^2 - 5(y^2 + 1) = -(2y - 1)^2 \leq 0$ với $\forall$ y

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta' = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$

Thế vào (1) ta tìm được $x = \frac{1}{4}$. Vậy $x = \frac{1}{4}$ và $y = \frac{1}{2}$ là các giá trị cần tìm.

Lời bình:

Câu V

1) Để giải một phương trình chứa hai ẩn, ta xem một trong hai ẩn là tham số. Giải phương trình với ẩn còn lại.

2) Các bạn tham khảo thêm một lời giải khác :

Ta có $5x - 2\sqrt{x}(2+y) + y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (4x - 4\sqrt{x} + 1) + y^2 + 2y\sqrt{x} + x = 0$

$\Leftrightarrow (2\sqrt{x}-1)^2+(y-\sqrt{x})^2=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}-1=y-\sqrt{x}=0 \quad \Leftrightarrow (x=\frac{1}{4}; y=\frac{1}{2})$.

Qua biến đổi ta thấy $5x-2\sqrt{x}(2+y)+y^2+1\geq 0$ với mọi y, với mọi $x>0$.

Trình bày lời giải này chúng tôi muốn nghiệm lại Lời bình sau câu 5 đề 2 rằng: phần lớn các phương trình chứa hai biến trở lên trong chương trình THCS đều là "phương trình điểm rơi". Biến đổi về tổng các biểu thức cùng dấu là cách giải đặc trưng của "phương trình điểm rơi".

ĐỀ SỐ 16

Câu 1:

1) $K = \frac{x}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}-1$

2) Khi $x=4+2\sqrt{3}$, ta có: $K=\sqrt{4+2\sqrt{3}}-1=\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}-1=\sqrt{3}+1-1=\sqrt{3}$

Câu 2:

1) Đường thẳng y = ax + b song song với đường thẳng y = 3x + 1 nên a = 3.
Vì đường thẳng y = ax + b đi qua điểm M (-1;2) nên ta có:2 = 3.(-1) + b $\Leftrightarrow$ b= 5 (t/m vì $b\neq 1$)
Vậy: a = 3, b = 5 là các giá trị cần tìm.

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}3x+2y=6\\x-3y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3\,(3y+2)+2y=6\\x=3y+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}11y=0\\x=3y+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}$.

Bài 3:

Gọi x là số xe lúc đầu (x nguyên dương, chiếc)
Số xe lúc sau là : x+3 (chiếc)
Lúc đầu mỗi xe chở : $\frac{96}{x}$ (tấn hàng)
Lúc sau mỗi xe chở : $\frac{96}{x+3}$ (tấn hàng)
Ta có phương trình **:** $\frac{96}{x}-\frac{96}{x+3}=1{,}6 \Leftrightarrow x^2+3x-180=0$
Giải phương trình ta được: $x_1=-15$; $x_2=12$.
Vậy đoàn xe lúc đầu có: 12 (chiếc).

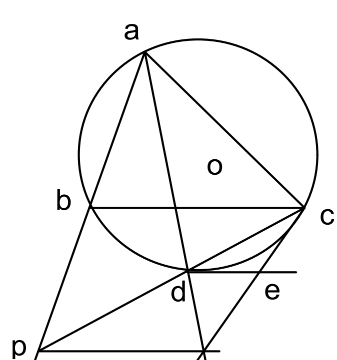
Câu 4:

1) $\widehat{CDE}=\frac{1}{2}\text{Sđ}\,\widehat{DC}=\frac{1}{2}\text{Sđ}\,\widehat{BD}=\widehat{BCD}$

$\Rightarrow$ DE// BC (2 góc ở vị trí so le trong)

2) $\widehat{APC}=\frac{1}{2}$ sđ $(\widehat{AC}-\widehat{DC})=\widehat{AQC}$

$\Rightarrow$ Tứ giác PACQ nội tiếp (vì $\widehat{APC}=\widehat{AQC}$)



3) Tứ giác APQC nội tiếp

$\widehat{CPQ} = \widehat{CAQ}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{CQ}$)

$\widehat{CAQ} = \widehat{CDE}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{DC}$)

Suy ra $\widehat{CPQ} = \widehat{CDE} \Rightarrow DE // PQ$

Ta có : $\frac{DE}{PQ} = \frac{CE}{CQ}$ (vì DE//PQ) (1) , $\frac{DE}{FC} = \frac{QE}{QC}$ (vì DE// BC) (2)

Cộng (1) và (2) : $\frac{DE}{PQ} + \frac{DE}{FC} = \frac{CE + QE}{CQ} = \frac{CQ}{CQ} = 1 \Rightarrow \frac{1}{PQ} + \frac{1}{FC} = \frac{1}{DE}$ (3)

ED = EC (t/c tiếp tuyến); từ (1) suy ra PQ = CQ

Thay vào (3) ta có : $\frac{1}{CQ} + \frac{1}{CF} = \frac{1}{CE}$

Câu 5 : Ta có $\frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{b+a} < \frac{a+c}{a+b+c}$ (1)

$\frac{b}{a+b+c} < \frac{b}{b+c} < \frac{b+a}{a+b+c}$ (2)

$\frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{a+b+c}$ (3)

Cộng từng vế (1), (2), (3), ta được : $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$, đpcm.

ĐỀ SỐ 17

Câu 1:

$$A = x_1.x_2 = \sqrt{3+\sqrt{5}} \,.\, \sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)} = \sqrt{3^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{9-5} = \sqrt{4} = 2$$

$$B = x_1^2 + x_2^2 = \left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2 = 3 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5} = 6$$

Câu 2: a) m = - 2, phương trình là: $x^2 + 3x - 6 = 0$; $\Delta = 33 > 0$, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$

b) Ta có $\Delta = \left[-(2m+1\right]^2 - 4(m^2 + 5m) = 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 20m = 1 - 16m$.

Phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 16m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{16}$

Khi đó hệ thức Vi-ét ta có tích các nghiệm là $m^2 + 5m$.

Mà tích các nghiệm bằng 6, do đó $m^2 + 5m = 6 \Leftrightarrow m^2 + 5m - 6 = 0$

Ta thấy a + b + c = 1 + 5 + (-6) = 0 nên $m_1 = 1$; $m_2 = -6$.

Đối chiếu với điều kiện $m \le \frac{1}{16}$ thì m = - 6 là giá trị cần tìm.

Câu 3: a) Khi m = - 2, ta có hai đường thẳng y = - x - 2 + 2 = - x và y = (4 - 2)x + 1 = 2x + 1

Ta có toạ độ giao điểm của 2 đường thẳng trên là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = -x \\ y = 2x + 1 \end{cases}$

$\Rightarrow -x = 2x + 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$. Từ đó tính được : $y = \frac{1}{3}$.

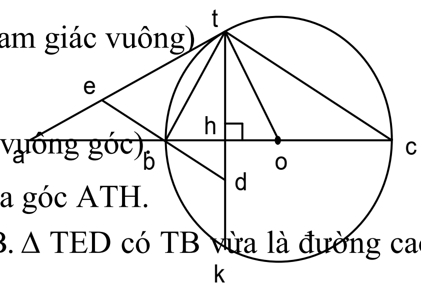
Vậy tọa độ giao điểm là $A(-\frac{1}{3};\frac{1}{3})$.

b) Hai đường thẳng (d), (d') song song khi và chỉ khi

$\begin{cases} m^2 - 2 = -1 \\ m + 2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$

Vậy m = 1 thì hai đường thẳng đã cho song song với nhau..

Câu 4: a) Trong tam giác vuông ATO có:



$R^2 = OT^2 = OA \cdot OH$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông)

b) Ta có $\widehat{ATB} = \widehat{BCT}$ Ñ (cùng chắn cung TB)

$\widehat{BCT} = \widehat{BTH}$ (góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc)

$\Rightarrow \widehat{ATB} = \widehat{BTH}$ hay TB là tia phân giác của góc ATH.

c) Ta có ED // TC mà TC ⊥ TB nên ED ⊥ TB. Δ TED có TB vừa là đường cao vừa là đường phân giác nên ΔTED cân tại T.

d) BD // TC nên $\frac{HB}{HC} = \frac{BD}{TC} = \frac{BE}{TC}$ (vì BD = BE) (1)

BE // TC nên $\frac{BE}{TC} = \frac{AB}{AC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{HB}{HC} = \frac{AB}{AC}$

Câu 5: Từ giả thiết: $(x + y)^2 + 7(x + y) + y^2 + 10 = 0$

$\Rightarrow (x+y)^2 + 2.(x+y).\frac{7}{2} + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 10 = -y^2 \le 0$

$\left(x + y + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \le 0 \Rightarrow \left(x + y + \frac{7}{2}\right)^2 \le \frac{9}{4}$.

Giải ra được $-4 \le x + y + 1 \le -1$.

A = -1 khi x = - 2 và y = 0, A = - 4 khi x = -5 và y = 0.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là - 4 và giá trị lớn nhất của A là - 1.

Lời bình:
Câu V

Bài toán đã cho có hai cách giải.
Cách 1. Biến đổi giả thiết về dạng $(mA + n)^2 = k^2 - [g(x, y)]^2$, từ đó mà suy ra
$$(mA + n)^2 \le k^2 \Leftrightarrow -k - n \le mA \le k + n \Rightarrow minA,\ maxA.$$
Cách 2. Từ $A = x + y + 1 \Rightarrow y = A - x - 1$, thế vào giả thiết có phương trình bậc hai đối với x. Từ $\Delta \ge 0$ ta tìm được minA, maxA .

ĐỀ SỐ 18

Câu 1: Rút gọn biểu thức:

1) $\sqrt{45} + \sqrt{20} - \sqrt{5} = \sqrt{3^2.5} + \sqrt{2^2.5} - \sqrt{5}$
$= 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

2) $\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2} = \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} + \dfrac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}+2}$
$= \sqrt{x} + 1 + \sqrt{x} - 2 = 2\sqrt{x} - 1$

Câu 2: Gọi x là chiều dài, y là chiều rộng của hình chữ nhật
(điều kiện: $x > 0$, $y > 0$, x, y tính bằng mét)
Theo bài ra ta có: $2(x + y) = 72 \Leftrightarrow x + y = 36$ (1)
Sau khi tăng chiều dài gấp 3, chiều rộng gấp đôi, ta có :
$2(3x + 2y) = 194 \Leftrightarrow 3x + 2y = 97$ (2)
Ta có hệ PT : $\begin{cases} x + y = 36 \\ 3x + 2y = 97 \end{cases}$ Giải hệ ta được: $\begin{cases} x = 25 \\ y = 11 \end{cases}$
Đối chiếu điều kiện bài toán ta thấy x, y thỏa mãn.
Vậy diện tích thửa vườn là: $S = xy = 25.11 = 275$ (m^2)

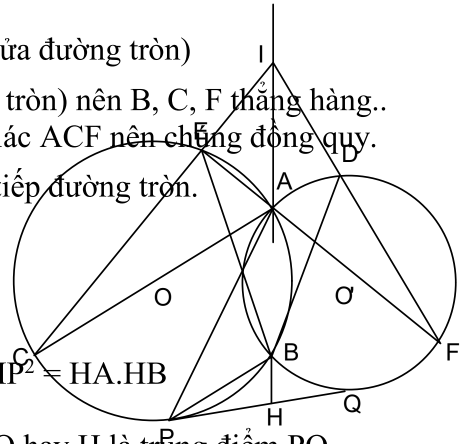
Câu 3:

1) Khi m = 2, PT đã cho trở thành: $x^2 - 4x + 3 = 0$
Ta thấy: $a + b + c = 1 - 4 + 3 = 0$
Vậy PT đã cho có 2 nghiệm: $x_1 = 1$; $x_2 = 3$

2) Điều kiện để phương trình đã cho có nghiệm là: $\Delta' = b'^2 - ac \ge 0 \Leftrightarrow 2^2 - (m+1) \ge 0$
$\Leftrightarrow 3 - m \ge 0 \Leftrightarrow m \le 3$ (1)
Áp dụng hệ thức Vi ét ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1x_2 = m + 1 \end{cases}$

$x_1^2 + x_2^2 = 5(x_1 + x_2) \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 5(x_1 + x_2)$
$\Leftrightarrow 4^2 - 2(m + 1) = 5.4 \Leftrightarrow 2(m + 1) = -4 \Leftrightarrow m = -3$
Kết hợp với điều kiện (1) , ta có m = - 3

Câu 4 :



1. Ta có: $\widehat{ABC} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{ABF} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên B, C, F thẳng hàng..
AB, CE và DF là 3 đường cao của tam giác ACF nên chúng đồng quy.

2. Do $\widehat{IEF} = \widehat{IBF} = 90^0$ suy ra BEIF nội tiếp đường tròn.

3. Gọi H là giao điểm của AB và PQ
Ta chứng minh được các tam giác AHP

và PHB đồng dạng $\Rightarrow \dfrac{HP}{HB} = \dfrac{HA}{HP} \Rightarrow HP^2 = HA.HB$

Tương tự, $HQ^2 = HA.HB$. Vậy HP = HQ hay H là trung điểm PQ.

Câu 5:

Điều kiện $x \neq 0$ và $2 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ và $|x| < \sqrt{2}$ (*)

Đặt $y = \sqrt{2 - x^2} > 0$

Ta có: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & (1) \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 2 & (2) \end{cases}$

Từ (2) ta có : x + y = 2xy. Thay vào (1) Có : xy = 1 hoặc $xy = -\dfrac{1}{2}$

* Nếu xy = 1 thì x + y = 2. Giải ra, ta có : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

* Nếu $xy = -\dfrac{1}{2}$ thì x + y = -1. Giải ra, ta có : $\begin{cases} x = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ y = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ y = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$..

Đối chiếu đk (*), phương trình đã cho có 2 nghiệm : x = 1 ; $x = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$.

🖂 **Lời nhắn .**
Câu IV.1

Liên hệ với lời bình sau câu 4b đề 12

ĐỀ SỐ 19

Câu 1: a) $A = \dfrac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+7)}{\sqrt{5}} + \dfrac{\sqrt{11}(\sqrt{11}+1)}{1+\sqrt{11}} = \sqrt{5}+7+\sqrt{11}.$

b) $B = \sqrt{5}.\dfrac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+\sqrt{11})}{5} = \sqrt{5}+\sqrt{11}$.

Vậy $A - B = \sqrt{5}+7+\sqrt{11} - \sqrt{5} - \sqrt{11} = 7$, đpcm.

Câu 2: a) Với m = 2 ta có hệ

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 3x + 2(2x - 1) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 7x = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm (x; y) = (1; 1).

b) Hệ có nghiệm duy nhất khi: $\dfrac{3}{m} \neq \dfrac{m}{-1} \Leftrightarrow m^2 \neq -3$ với mọi m

Vậy hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất với mọi m.

Câu 3: Gọi cạnh góc vuông nhỏ là x.

Cạnh góc vuông lớn là x + 2

Điều kiện: $0 < x < 10$, x tính bằng m.

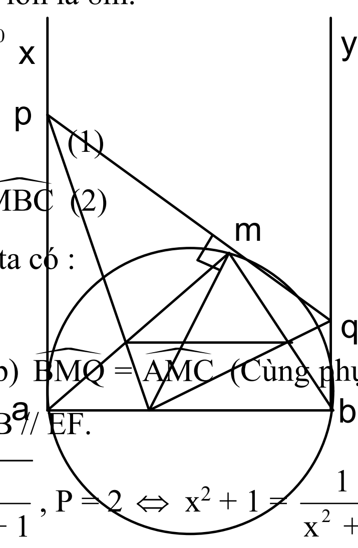
Theo định lý Pitago ta có phương trình: $x^2 + (x + 2)^2 = 10^2$.

Giải phương trình ta được $x_1 = 6$ (t/m), $x_2 = - 8$ (loại).

Vậy cạnh góc vuông nhỏ là 6m; cạnh góc vuông lớn là 8m.

Câu 4: a) Ta có $\widehat{PAC} = 90^0$ $\widehat{PAC} + \widehat{PMC} = 180^0$

nên tứ giác APMC nội tiếp



b) Do tứ giác APMC nội tiếp nên $\widehat{MPC} = \widehat{MAC}$ (1)

Dễ thấy tứ giác BCMQ nội tiếp suy ra $\widehat{MQC} = \widehat{MBC}$ (2)

Lại có $\widehat{MAC} + \widehat{MBC} = 90^0$ (3). Từ (1), (2), (3) ta có :

$\widehat{MPC} + \widehat{MBC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{PCQ} = 90^0$.

c) Ta có $\widehat{BMQ} = \widehat{BCQ}$ (Tứ giác BCMQ nội tiếp) $\widehat{BMQ} = \widehat{AMC}$ (Cùng phụ với BMC) $\widehat{EMC} = \widehat{EFC}$ (Tứ giác CEMF nội tiếp). Nên $\widehat{BCQ} = \widehat{EFC}$ hay AB // EF.

Câu 5: $P = x^2 + 1 + \dfrac{1}{x^2+1} \geq 2\sqrt{\left(x^2+1\right)\dfrac{1}{x^2+1}}$, $P = 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = \dfrac{1}{x^2+1} \Leftrightarrow x = 0$. Vậy min P = 2.

ĐỀ SỐ 20

Câu 1: a) $A = \dfrac{2(\sqrt{5}+2) - 2(\sqrt{5}-2)}{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)} = \dfrac{2\sqrt{5}+4 - 2\sqrt{5}+4}{\left(\sqrt{5}\right)^2 - 2^2} = \dfrac{8}{5-4} = 8$.

b) Ta có:

$$B = \frac{x-1}{\sqrt{x}} : \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)} = \frac{x-1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1+1-\sqrt{x}}$$

$$= \frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)} = \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}}$$

Câu 2: $x^2 - (m+5)x - m + 6 = 0$ (1)

a) Khi m = 1, ta có phương trình $x^2 - 6x + 5 = 0$

$a + b + c = 1 - 6 + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = 5$

b) Phương trình (1) có nghiệm x = - 2 khi:

$(-2)^2 - (m+5).(-2) - m + 6 = 0 \Leftrightarrow 4 + 2m + 10 - m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = -20$

c) $\Delta = (m+5)^2 - 4(-m+6) = m^2 + 10m + 25 + 4m - 24 = m^2 + 14m + 1$

Phương trình (1) có nghiệm khi $\Delta = m^2 + 14m + 1 \geq 0$ (*)

Với điều kiện trên, áp dụng định lí Vi-ét, ta có:

$S = x_1 + x_2 = m + 5$; $P = x_1.x_2 = -m + 6$. Khi đó: $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = 24 \Leftrightarrow x_1x_2(x_1 + x_2) = 24$

$\Leftrightarrow (-m+6)(m+5) = 24 \Leftrightarrow m^2 - m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 3; m = -2.$

Giá trị m = 3 thoả mãn, m = - 2 không thoả mãn điều kiện. (*)

Vậy m = 3 là giá trị cần tìm.

Câu 3: Gọi x là số dãy ghế trong phòng lúc đầu (x nguyên, x > 3)

x - 3 là số dãy ghế lúc sau.

Số chỗ ngồi trên mỗi dãy lúc đầu: $\frac{360}{x}$ (chỗ), số chỗ ngồi trên mỗi dãy lúc sau: $\frac{360}{x-3}$ (chỗ)

Ta có phương trình: $\frac{360}{x-3} - \frac{360}{x} = 4$

Giải ra được $x_1 = 18$ (thỏa mãn); $x_2 = -15$ (loại)

Vậy trong phòng có 18 dãy ghế.

Câu 4: a) ΔSAB cân tại S (vì SA = SB - theo t/c 2 tiếp tuyến cắt nhau)

nên tia phân giác SO cũng là đường cao $\Rightarrow SO \perp AB$

b) $\widehat{SHE} = \widehat{SIE} = 90^0 \Rightarrow$ IHSE nội tiếp đường tròn đường kính SE.

c) $\Delta SOI \sim \Delta EOH$ (g.g) $\Rightarrow \frac{OI}{OH} = \frac{SO}{OE}$

$\Rightarrow$ OI . OE = OH . OS = R^2 (hệ thức lượng trong tam giác vuông SOB)

Câu 5: (1) $\Leftrightarrow$ $x^3 - 2mx^2 + m^2x + x - m = 0$, $\Leftrightarrow$ $x(x^2 - 2mx + m^2) + x - m = 0$

$\Leftrightarrow$ $x(x - m)^2 + (x - m) = 0$

$\Leftrightarrow$ $(x - m)(x^2 - mx + 1) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} x = m \\ x^2 - mx + 1 = 0 \quad (2) \end{array}\right.$

Để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt thì (2) có hai nghiệm phân biệt khác m.
Dễ thấy x = m không là nghiệm của (2). Vậy (2) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$\Delta = m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right.$.

Vậy các giá trị m cần tìm là: $\left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right.$.

ĐỀ SỐ 21

Câu 1.

1) $A = \dfrac{2}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)} = \dfrac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{4} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

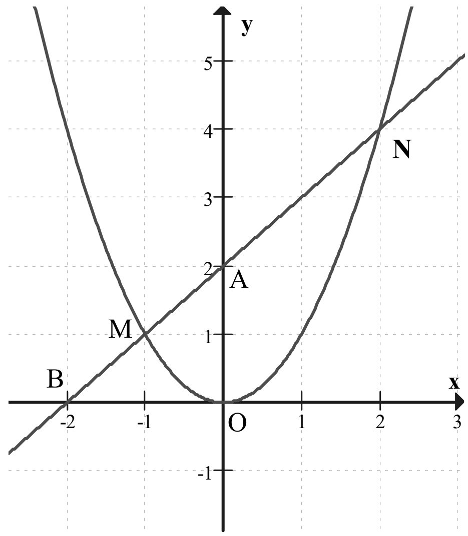
2) Ta có hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -3 \\ y = x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} \\ y = -\dfrac{11}{2} \end{cases}$.

Câu 2.

1) Vẽ đồ thị $y = x^2$ thông qua bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

Vẽ đồ thị $y = x + 2$ qua các điểm A(0, 2) và B(-2,0).



2) Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị

$x^2 = x + 2$ hay $x^2 - x - 2 = 0$.

Phương trình này có nghiệm: $x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = 1$ và $x_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 4$.

Vậy hai đồ thị cắt nhau tại hai điểm M(-1, 1) và N(2, 4).

Câu 3.

1) Với $m = 2$, ta có phương trình: $2x^2 + 3x + 1 = 0$. Các hệ số của phương trình thoả mãn $a - b + c = 2 - 3 + 1 = 0$ nên phương trình có các nghiệm: $x_1 = -1,\ x_2 = -\dfrac{1}{2}$.

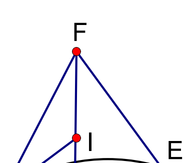
2) Phương trình có biệt thức $\Delta = (2m-1)^2 - 4.2.(m-1) = (2m-3)^2 \geq 0$ nên phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 với mọi m.

Theo định lý Viet, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2m-1}{2} \\ x_1.x_2 = \dfrac{m-1}{2} \end{cases}$.

Điều kiện đề bài $4x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 = 1 \Leftrightarrow 4(x_1 + x_2)^2 - 6x_1x_2 = 1$. Từ đó ta có: $(1-2m)^2 - 3(m-1) = 1$ $\Leftrightarrow 4m^2 - 7m + 3 = 0$.

Phương trình này có tổng các hệ số $a + b + c = 4 + (-7) + 3 = 0$ nên phương trình này có các nghiệm $m_1 = 1, m_2 = \dfrac{3}{4}$. Vậy các giá trị cần tìm của m là $m = 1, m = \dfrac{3}{4}$.

Câu 4. 1) Tứ giác FCDE có 2 góc đối : $\widehat{FED} = \widehat{FCD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Suy ra tứ giác FCDE nội tiếp.



2) Xét hai tam giác ACD và BED có: $\widehat{ACD} = \widehat{BED} = 90^0$, $\widehat{ADC} = \widehat{BDE}$ (đối đỉnh) nên Δ ACD ~ Δ BED. Từ đó ta có tỷ số : $\frac{DC}{DA} = \frac{DE}{DB} \Rightarrow DC.DB = DA.DE$.

3) I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác FCDE ⇒ tam giác ICD cân ⇒ $\widehat{ICD} = \widehat{IDC} = \widehat{FEC}$ (chắn cung $\overset{\frown}{FC}$). Mặt khác tam giác OBC cân nên $\widehat{OCB} = \widehat{OBC} = \widehat{DEC}$ (chắn cung $\overset{\frown}{AC}$ của (O)). Từ đó $\widehat{ICO} = \widehat{ICD} + \widehat{DCO} = \widehat{FEC} + \widehat{DEC} = \widehat{FED} = 90^0$ ⇒ IC ⊥ CO hay IC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Câu 5. Đặt $\sqrt{\frac{4x+9}{28}} = y + \frac{1}{2},\ y \geq -\frac{1}{2}$ ta có $\frac{4x+9}{28} = y^2 + y + \frac{1}{4} \Leftrightarrow 7y^2 + 7y = x + \frac{1}{2}$.

Cùng với phương trình ban đầu ta có hệ: $\begin{cases} 7x^2 + 7x = y + \frac{1}{2} \\ 7y^2 + 7y = x + \frac{1}{2} \end{cases}$.

Trừ vế cho vế của hai phương trình ta thu được

$7(x^2 - y^2) + 7(x - y) = y - x \Leftrightarrow (x-y)(7x + 7y + 8) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$ (vì $x > 0$ và $y \geq -\frac{1}{2}$ nên $7x + 7y + 8 > 0$) hay $x = y$.

Thay vào một phương trình trên ta được $7x^2 + 6x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{-6-\sqrt{50}}{14} \\ x = \frac{-6+\sqrt{50}}{14} \end{array}\right.$. Đối chiếu với điều kiện của x, y ta được nghiệm là $x = \frac{-6+\sqrt{50}}{14}$.

Lời bình:
Câu V

Chắc chắn sẽ hỏi đằng sau phép đặt ẩn phụ $\sqrt{\frac{4x+9}{28}} = y + \frac{1}{2}$ ***có sự "mách bảo" nào không?***

Ta có $7x^2 + 7x = \sqrt{\frac{4x+9}{28}} \Leftrightarrow 7\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \sqrt{\frac{4x+9}{28}} + \frac{1}{4}$

Dưới hình thức mới phương trình đã cho thuộc dạng

$(ax+b)^2 = p\sqrt{a'x+b'} + qx + r$, $(a \neq 0, a' \neq 0, p \neq 0)$

Một lần Lời bình sau câu 5 đề 13 đã chỉ dẫn cách đặt ẩn phụ như trên.

ĐỀ SỐ 22

Câu 1: 1) $x^2 - 2x - 15 = 0$, $\Delta' = 1 - (-15) = 16$, $\sqrt{\Delta'} = 4$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x_1 = 1 - 4 = -3$; $x_2 = 1 + 4 = 5$

2. Đường thẳng y = ax - 1 đi qua điểm M (- 1; 1) khi và chỉ khi: 1 = a (-1) -1

<=> a = - 2. Vậy a = - 2

Câu 2: 1) $P = \dfrac{a-1}{2\sqrt{a}}.\dfrac{\left(a-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}-1\right)-\left(a+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}$

$$= \frac{(a-1)\left(a\sqrt{a}-a-a+\sqrt{a}-a\sqrt{a}-a-a-\sqrt{a}\right)}{2\sqrt{a}(a-1)} = \frac{-4\sqrt{a}.\sqrt{a}}{2\sqrt{a}} = -2\sqrt{a}.$$

Vậy $P = -2\sqrt{a}$.

2) Ta có: $P \geq -2 \Leftrightarrow -2\sqrt{a} \geq -2 \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 1$

Kết hợp với điều kiện để P có nghĩa, ta có: 0 < a < 1

Vậy $P \geq -2\sqrt{a}$ khi và chỉ khi 0 < a < 1

Câu 3: Gọi x, y số chi tiết máy của tổ 1, tổ 2 sản xuất trong tháng giêng ($x, y \in N^*$),
ta có x + y = 900 (1) (vì tháng giêng 2 tổ sản xuất được 900 chi tiết). Do cải tiến kỹ thuật nên tháng hai tổ 1 sản xuất được: x + 15%x, tổ 2 sản xuất được: y + 10%y.

Cả hai tổ sản xuất được: 1,15x + 1,10y = 1010 (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y=900 \\ 1{,}15x+1{,}1y=1010 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1{,}1x+1{,}1y=990 \\ 1{,}15x+1{,}1y=1010 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}05x=20 \\ x+y=900 \end{cases}$$

<=> x = 400 và y = 500 (thoả mãn)

Vậy trong tháng giêng tổ 1 sản xuất được 400 chi tiết máy, tổ 2 sản xuất được 500 chi tiết máy.

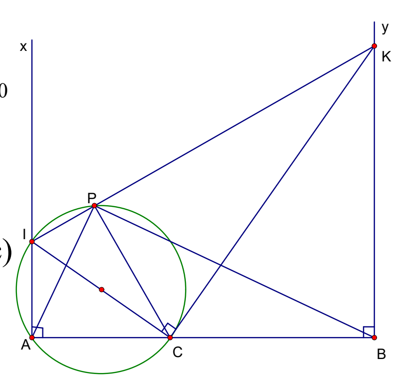
Câu 4: 1) Ta có $\widehat{IPC} = 90^0$ (vì góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) => $\widehat{CPK} = 90^0$.

Xét tứ giác CPKB có: $\widehat{K} + \widehat{B} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

=> CPKB là tứ giác nội tiếp đường tròn (đpcm)

2) Xét Δ AIC và Δ BCK có $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^0$;

$\widehat{ACI} = \widehat{BKC}$ (2 góc có cạnh tương ứng vuông góc)



=> Δ AIC ~ Δ BCK (g.g) => $\frac{AI}{BC} = \frac{AC}{BK}$

=> AI.BK = AC.BC.

3) Ta có: $\widehat{PAC} = \widehat{PIC}$ (vì 2 góc nội tiếp cùng chắn cung PC)

$\widehat{PBC} = \widehat{PKC}$ (vì 2 góc nội tiếp cùng chắn cung PC)

Suy ra $\widehat{PAC} + \widehat{PBC} = \widehat{PIC} + \widehat{PKC} = 90^0$ (vì Δ ICK vuông tại C).=> $\widehat{APB} = 90^0$.

Câu 5: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + px + q = 0$ biết p + q= 198.

Phương trình có nghiệm khi $\Delta \geq 0$ <=> $p^2 + 4q \geq 0$; gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm.

- Khi đó theo hệ thức Viét có $x_1 + x_2 = -p$ và $x_1x_2 = q$

mà p + q = 198 => $x_1x_2 - (x_1 + x_2) = 198$

<=> $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 199 = 1 . 199 = (-1)(-199)$ (Vì $x_1, x_2 \in Z$)

Nên ta có :

$x_1 - 1$	1	-1	199	-199
$x_2 - 1$	199	-199	1	-1
x_1	2	0	200	-198
x_2	200	-198	2	0

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên: (2; 200); (0; -198); (200; 2); (-198; 0)

ĐỀ SỐ 23

Câu 1.

1) A = $\left(\sqrt{20} - 3\sqrt{5} + \sqrt{80}\right)\sqrt{5} = \left(2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 4\sqrt{5}\right).\sqrt{5} = 3\sqrt{5}.\sqrt{5} = 15$.

2) Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$ phương trình trở thành $4t^2 + 7t - 2 = 0$.

Biệt thức $\Delta = 7^2 - 4.4.(-2) = 81$

Phương trình có nghiệm $t_1 = \frac{1}{4}$, $t_2 = -2$ (loại).

Với $t = \frac{1}{4}$ ta có $x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}$. Vậy phương trình có nghiệm $x = \pm\frac{1}{2}$.

Câu 2.

1) Ta gọi (d_1), (d_2) lần lượt là các đường thẳng có phương trình $y = -3x + 6$ và $y = \frac{5}{2}x - 2m + 1$. Giao điểm của (d_1) và trục hoành là A(2, 0). Yêu cầu của bài toán được thoả mãn khi và chỉ khi (d_2) cũng đi qua A $\Leftrightarrow$ $0 = \frac{5}{2}.2 - 2m + 1 \Leftrightarrow m = 3$.

2) Gọi x là chiều rộng của hình chữ nhật (đơn vị m, x > 0)

$\Rightarrow$ chiều dài của hình chữ nhật là x + 7 (m).

Vì đường chéo là 13 (m) nên theo định lý Piatago ta có :

$13^2 = x^2 + (x+7)^2 \Leftrightarrow\ 2x^2 + 14x + 49 = 169$

$\Leftrightarrow\ x^2 + 7x - 60 = 0 \ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -12 \end{array}\right.$. Chỉ có nghiệm $x = 5$ thoả mãn.

Vậy mảnh đất có chiều rộng 5m, chiều dài 12m và diện tích là S = 5.12 = 60 (m^2).

Câu 3.

1) Khi $m = 3$ phương trình trở thành $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0;\ x = 2$.

2) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \ \Leftrightarrow\ \Delta' = 1 - (m-3) > 0 \Leftrightarrow\ m < 4$.

Khi đó theo định lí Vi-et ta có: $x_1 + x_2 = 2$ (1) và $x_1 x_2 = m - 3$ (2).

Điều kiện bài toán $x_1^2 - 2x_2 + x_1 x_2 = -12 \ \Leftrightarrow\ x_1(x_1 + x_2) - 2x_2 = -12$

$\Leftrightarrow 2x_1 - 2x_2 = -12$ (do (1)) $\Leftrightarrow x_1 - x_2 = -6$ (3).

Từ (1) và (3) ta có: $x_1 = -2, x_2 = 4$. Thay vào (3) ta được: $(-2).4 = m - 3$

$\Leftrightarrow\ m = -5$, thoả mãn điều kiện.

Vậy $m = -5$.

Câu 4.

1) Ta có $\widehat{DAB} = \dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{DB}$ (góc nội tiếp) và $\widehat{BDE} = \dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{DB}$ (góc giữa tiếp tuyến và dây cung). Suy ra $\widehat{DAB} = \widehat{BDE}$.

2) Xét hai tam giác DMB và AMD có: $\widehat{DMA}$ chung, $\widehat{DAM} = \widehat{BDM}$ nên $\Delta DMB \sim \Delta AMD$

$\Rightarrow \dfrac{MD}{MB} = \dfrac{MA}{MD}$ hay $MD^2 = MA.MB$.

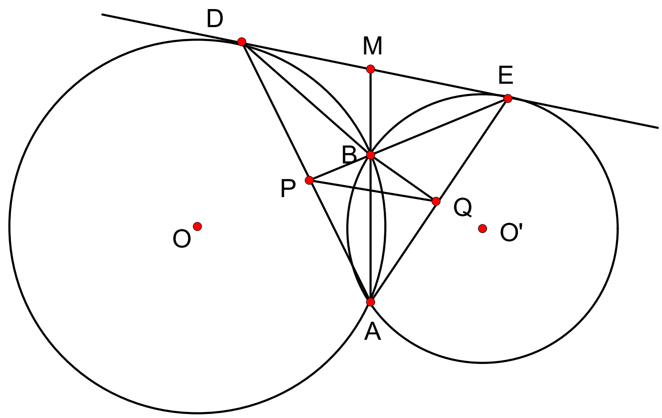
Tương tự ta cũng có: $\Delta EMB \sim \Delta AME \ \Rightarrow \dfrac{ME}{MB} = \dfrac{MA}{ME}$ hay $ME^2 = MA.MB$.

Từ đó: MD = ME hay M là trung điểm của DE.

3) Ta có $\widehat{DAB} = \widehat{BDM}$, $\widehat{EAB} = \widehat{BEM}$

$\Rightarrow \widehat{PAQ} + \widehat{PBQ} = \widehat{DAB} + \widehat{EAB} + \widehat{PBQ} = \widehat{BDM} + \widehat{BEM} + \widehat{DBE} = 180^0$

$\Rightarrow$ tứ giác APBQ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{PQB} = \widehat{PAB}$. Kết hợp với $\widehat{PAB} = \widehat{BDM}$ suy ra $\widehat{PQB} = \widehat{BDM}$. Hai góc này ở vị trí so le trong nên PQ song song với AB.



Câu 5. Đặt $y = \dfrac{4x+3}{x^2+1}$.

Khi đó ta có $y\left(x^2+1\right) = 4x+3 \iff y.x^2 - 4x + \left(y-3\right) = 0$ (1).

Ta tìm điều kiện của y để (1) có nghiệm.

Nếu $y = 0$ thì (1) có nghiệm $x = -\dfrac{4}{3}$.

Nếu $y \neq 0$, (1) có nghiệm $\iff \Delta' = 2^2 - y\left(y-3\right) \geq 0 \iff y^2 - 3y - 4 \leq 0 \iff -1 \leq y \leq 4$.

Kết hợp lại thì (1) có nghiệm $\iff -1 \leq y \leq 4$.

Theo giả thiết y là số nguyên âm $\iff y = -1$. Khi đó thay vào trên ta có $x = -2$.

Lời bình:

Câu V

1) Từ cách giải bài toán trên ta suy biểu thức $y = \dfrac{4x+3}{x^2+1}$ có GTNN bằng –1 và GTLN bằng 4.

2) Phương pháp giải bài toán trên cũng là phương phương pháp tìm GTNN, GTLN của các biểu thức dạng $P = \dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ (với $b'^2 - 4ac < 0$), chẳng hạn

$P = \dfrac{20x^2+10x+3}{3x^2+2x+1}$ ***;*** $Q = \dfrac{x^2-8xy+7y^2}{x^2+y^2}$ ***với $x^2 + y^2 > 0$;***

$F = x^2 + 2xy - y^2$ với $4x^2 + 2xy + y^2 = 3$.

ĐỀ SỐ 24

Câu 1.

1) A = $(1-\sqrt{5})\cdot\dfrac{\sqrt{5}(1+\sqrt{5})}{2\sqrt{5}}=(1-\sqrt{5})\cdot\dfrac{(1+\sqrt{5})}{2}=\dfrac{1-5}{2}=-2$.

2) B = $\left(1+\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{1+\sqrt{x}}\right)\left(1+\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{1-\sqrt{x}}\right)=\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x}\right)=1-x$.

Câu 2.

1) Thay $x=2$ vào vế trái của phương trình ta được:

$2^2+\left(3-m\right).2+2(m-5)=4+6-2m+2m-10=0$ đúng với mọi m

nên phương trình có nghiệm $x=2$ với mọi m

2) Vì phương trình luôn có nghiệm $x=2$ nên để nó có nghiệm $x=5-2\sqrt{2}$ thì theo định lý Vi-et ta có:

$2\left(5-2\sqrt{2}\right)=2\left(m-5\right) \Leftrightarrow 5-2\sqrt{2}=m-5 \Leftrightarrow m=10-2\sqrt{2}$.

Câu 3.

Gọi x (km/h) là vận tốc dự định của xe, x > 15.

Thời gian dự định của xe là $\dfrac{80}{x}$.

Thời gian xe đi trong một phần tư quãng đường đầu là $\dfrac{20}{x-15}$, thời gian xe đi trong quãng đường còn lại là $\dfrac{60}{x+10}$.

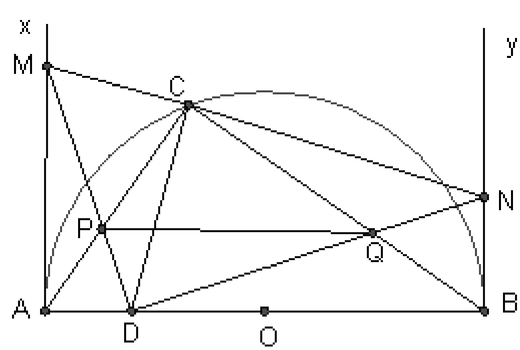
Theo bài ra ta có $\dfrac{80}{x}=\dfrac{20}{x-15}+\dfrac{60}{x+10}$ (1).

Biến đổi (1) $\Leftrightarrow \dfrac{4}{x}=\dfrac{1}{x-15}+\dfrac{3}{x+10} \Leftrightarrow 4\left(x-15\right)\left(x+10\right)=x\left(4x-35\right)$

$\Leftrightarrow$ $15x=600$ $\Leftrightarrow$ x = 40 (thoả mãn điều kiện).

Từ đó thời gian dự định của xe là $\dfrac{80}{40}=2$ giờ.

Câu 4.



1) Ta có vì Ax là tiếp tuyến của nửa đường tròn nên $\widehat{MAD} = 90^0$. Mặt khác theo giả thiết $\widehat{MCD} = 90^0$ nên suy ra tứ giác ADCM nội tiếp.

Tương tự, tứ giác BDCN cũng nội tiếp.

2) Theo câu trên vì các tứ giác ADCM và BDCN nội tiếp nên: $\widehat{DMC} = \widehat{DAC}$, $\widehat{DNC} = \widehat{DBC}$.

Suy ra $\widehat{DMC} + \widehat{DNC} = \widehat{DAC} + \widehat{DBC} = 90^0$. Từ đó $\widehat{MDN} = 90^0$.

3) Vì $\widehat{ACB} = \widehat{MDN} = 90^0$ nên tứ giác CPDQ nội tiếp. Do đó $\widehat{CPQ} = \widehat{CDQ} = \widehat{CDN}$.

Lại do tứ giác CDBN nội tiếp nên $\widehat{CDN} = \widehat{CBN}$. Hơn nữa ta có $\widehat{CBN} = \widehat{CAB}$, suy ra $\widehat{CPQ} = \widehat{CAB}$ hay PQ song song với AB.

Câu 5. Với các số dương x, y ta có: $(x+y)^2 \ge 4xy \Leftrightarrow \dfrac{x+y}{xy} \ge \dfrac{4}{x+y} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \ge \dfrac{4}{x+y}$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta, có:

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

$$\ge a.\frac{4}{b+c} + b.\frac{4}{c+a} + c.\frac{4}{a+b} = 4\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Lời bình:

Câu II.1

Thay câu II.1 bởi câu : Chứng minh phương trình có nghiệm không phụ thuộc giá trị của m, ta được một bài toán "thông minh hơn".

Biến đổi phương trình về dạng $m(x-2) = x^2 + 3x - 10$. (1)

Xem (1) là phương trình đối với m. Thế thì (1) có nghiệm không phụ thuộc m khi và chỉ khi $x - 2 = x^2 + 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy có x = 2 là nghiệm cố định không phụ thuộc vào m của phương trình đã cho.

Vấn đề nghiệm cố định còn được bàn thêm ở lời bình sau câu Câu I4b, đề 32.

ĐỀ SỐ 25

Câu 1.

1) Ta có A = $\left(\dfrac{x-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}\right):\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1}\right) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$.

2) $x = 2\sqrt{2}+3 \Leftrightarrow x = \left(\sqrt{2}+1\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2}+1$ nên A = $\dfrac{2\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+1} = 2$.

Câu 2. 1) Khi $a = 3$ và $b = -5$ ta có phương trình: $x^2 + 3x - 4 = 0$. Do a + b + c = 0 nên phương trình có nghiệm $x_1 = 1, x_2 = -4$.

2) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta = a^2 - 4(b+1) > 0$ (*)

Khi đó theo định lý Vi-et, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1x_2 = b+1 \end{cases}$ (1).

Bài toán yêu cầu $\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1^3 - x_2^3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ (x_1 - x_2)^3 + 3x_1x_2(x_1 - x_2) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1x_2 = -2 \end{cases}$ (2).

Từ hệ (2) ta có: $(x_1 + x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + 4x_1x_2 = 3^2 + 4(-2) = 1$, kết hợp với (1) được

$\begin{cases} a^2 = 1 \\ b+1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1, b = -3 \\ a = -1, b = -3 \end{array}\right.$.

Các giá trị này đều thoả mãn điều kiện (*) nên chúng là các giá trị cần tìm.

Câu 3.

Gọi x (km/h) là vận tốc thực của chiếc thuyền (x > 4).

Vận tốc của chiếc thuyền khi xuôi dòng là x + 4 (km/m).

Vận tốc của chiếc thuyền khi ngược dòng là x – 4 km.

Thời gian chiếc thuyền đi từ A đến B là $\frac{24}{x+4}$.

Thời gian chiếc thuyền quay về từ B đến C là $\frac{16}{x-4}$.

Thời gian chiếc bè đi được $\frac{8}{4} = 2$ (giờ).

Ta có phương trình: $\frac{24}{x+4} + \frac{16}{x-4} = 2$ (1).

Biến đổi phương trình: (1) $\Leftrightarrow 12(x-4) + 8(x+4) = (x-4)(x+4) \Leftrightarrow x^2 - 20x = 0$

$\Leftrightarrow x(x-20) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 20 \end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện ta thấy chỉ có nghiệm x = 20 thoả mãn. Vậy vận tốc thực của chiếc thuyền là 20km/h.

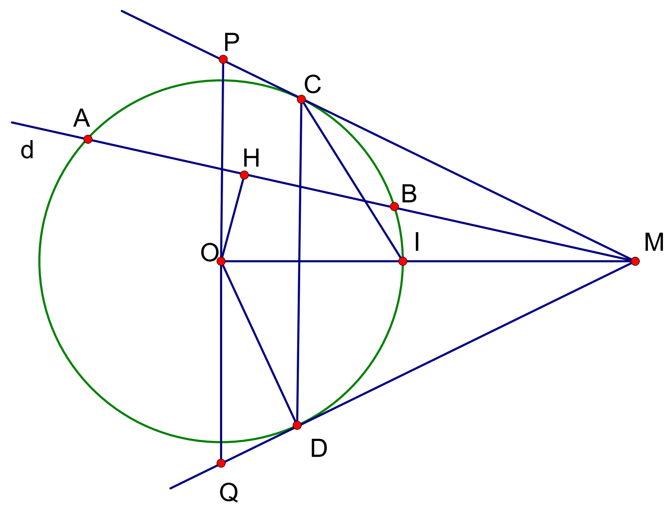
Câu 4.

1) Vì H là trung điểm của AB nên $OH \perp AB$ hay $\widehat{OHM} = 90^0$. Theo tính chất của tiếp tuyến ta lại có $OD \perp DM$ hay $\widehat{ODM} = 90^0$. Suy ra các điểm M, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

2) Theo tính chất tiếp tuyến, ta có MC = MD ⇒ ΔMCD cân tại M ⇒ MI là một đường phân giác của $\widehat{CMD}$. Mặt khác I là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{CD}$ nên $\widehat{DCI} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{DI} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{CI} = \widehat{MCI}$

$\Rightarrow$ CI là phân giác của $\widehat{MCD}$. Vậy I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MCD.

3) Ta có tam giác MPQ cân ở M, có MO là đường cao nên diện tích của nó được tính: $S = 2S_{OQM} = 2.\frac{1}{2}.OD.QM = R(MD + DQ)$. Từ đó S nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MD + DQ nhỏ nhất. Mặt khác, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông OMQ ta có $DM.DQ = OD^2 = R^2$ không đổi nên MD + DQ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ DM = DQ = R. Khi đó OM = $R\sqrt{2}$ hay M là giao điểm của d với đường tròn tâm O bán kính $R\sqrt{2}$.



Câu 5.

Từ giả thiết ta có: $abc\left(a+b+c\right)=1$. Do đó, áp dụng bất đẳng thức Côsi,

P = $\left(a+b\right)\left(a+c\right) = a^2+ab+ac+bc = a\left(a+b+c\right)+bc \geq 2\sqrt{a\left(a+b+c\right)bc} = 2$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a\left(a+b+c\right)=bc \\ a+b+c=\dfrac{1}{abc} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\left(a+b+c\right)=1 \\ bc=1 \end{cases}$.

Hệ này có vô số nghiệm dương, chẳng hạn ta chọn b = c = 1 $\Rightarrow$ a = $\sqrt{2}-1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 2.

ĐỀ SỐ 26

Câu 1:

1) $\frac{1}{2-\sqrt{5}}-\frac{1}{2+\sqrt{5}}=\frac{\left(2+\sqrt{5}\right)-\left(2-\sqrt{5}\right)}{\left(2-\sqrt{5}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)}=\frac{2\sqrt{5}}{-1}=-2\sqrt{5}$

2) $\begin{cases}3x + y = 9\\ x - 2y = - 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6x + 2y = 18\\ x - 2y = - 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7x = 14\\ y = 9 - 3x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 2\\ y = 3\end{cases}$.

Câu 2:

1) $P = \left(\frac{1}{x+\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right):\frac{\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}+1} = \left(\frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}\right).\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}}$

$=\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}.\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}}=\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}.\sqrt{x}}=\frac{1 - x}{x}$.

2) Với $x > 0$ thì $\frac{1 - x}{x} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\left(1 - x\right) > x \Leftrightarrow -3x > - 2 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$.

Vậy với $0 < x < \frac{2}{3}$ thì $P > \frac{1}{2}$.

Câu 3:

1) Với m = 1, ta có phương trình: $x^2 - x + 1 = 0$

Vì $\Delta = - 3 < 0$ nên phương trình trên vô nghiệm.

2) Ta có: $\Delta = 1 - 4m$. Để phương trình có nghiệm thì $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow 1 - 4m \ge 0 \Leftrightarrow m \le \frac{1}{4}$ (1).

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = 1$ và $x_1.x_2 = m$

Thay vào đẳng thức: $(x_1x_2 - 1)^2 = 9(x_1 + x_2)$, ta được:

$(m - 1)^2 = 9 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m = - 2\\ m = 4\end{array}\right.$..

Đối chiếu với điều kiện (1) suy ra chỉ có m = -2 thỏa mãn.

Câu 4:

1) Tứ giác ABEH có: $\widehat{B} = 90^0$ (góc nội tiếp trong nửa đường tròn); $\widehat{H} = 90^0$ (giả thiết) nên tứ giác ABEH nội tiếp được.

Tương tự, tứ giác DCEH có $\widehat{C} = \widehat{H} = 90^0$, nên nội tiếp được.

2) Trong tứ giác nội tiếp ABEH, ta có:

$\widehat{EBH} = \widehat{EAH}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{EH}$)

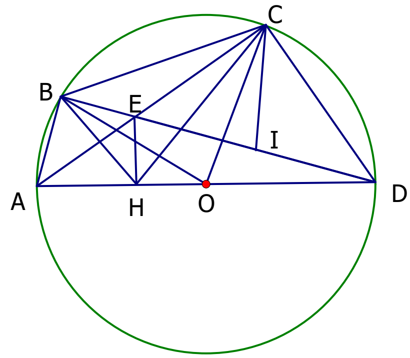
Trong (O) ta có: $\widehat{EAH} = \widehat{CAD} = \widehat{CBD}$

(cùng chắn cung $\overset{\frown}{CD}$).

Suy ra: $\widehat{EBH} = \widehat{EBC}$, nên BE là tia phân giác của góc $\widehat{HBC}$.

Tương tự, ta có: $\widehat{ECH} = \widehat{BDA} = \widehat{BCE}$, nên CE là tia phân giác của góc $\widehat{BCH}$.

Vậy E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCH.



---

3) Ta có I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông ECD, nên $\widehat{BIC} = 2\widehat{EDC}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung $\overset{\frown}{EC}$). Mà $\widehat{EDC} = \widehat{EHC}$, suy ra $\widehat{BIC} = \widehat{BHC}$.

+ Trong (O), $\widehat{BOC} = 2\widehat{BDC} = \widehat{BHC}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung $\overset{\frown}{BC}$).

+ Suy ra: H, O, I ở trên cung chứa góc $\widehat{BHC}$ dựng trên đoạn BC, hay 5 điểm B, C, H, O, I cùng nằm trên một đường tròn.

Câu 5: ĐK: $x \geq -3$ (1)

Đặt $\sqrt{x+8} = a;\ \sqrt{x+3} = b\ \left(a \geq 0;\ b \geq 0\right)$ (2)

Ta có: $a^2 - b^2 = 5;\ \sqrt{x^2 + 11x + 24} = \sqrt{\left(x+8\right)\left(x+3\right)} = ab$

Thay vào phương trình đã cho ta được:

$(a - b)(ab + 1) = a^2 - b^2 \Leftrightarrow (a - b)(1 - a)(1 - b) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a - b = 0 \\ 1 - a = 0 \\ 1 - b = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+8} = \sqrt{x+3}\ (vn) \\ \sqrt{x+8} = 1 \\ \sqrt{x+3} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -7 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

Đối chiếu với (1) suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất x = - 2.

ĐỀ SỐ 27

Câu 1:

1) $A = \frac{1}{2}\sqrt{4.5} - \sqrt{16.5} + \frac{2}{3}\sqrt{9.5} = \sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = -\sqrt{5}$.

2) $B = \left(2 + \frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}\right).\left(2 - \frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}\right)$

$$=\left(2+\frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-1\right)}{\sqrt{5}-1}\right)\left(2-\frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)}{\sqrt{5}+1}\right)=\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)=-1$$

Câu 2:

1) $\begin{cases}2x - y = 1 - 2y\\ 3x + y = 3 - x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x + y = 1\\ 4x + y = 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x = 2\\ y = 1 - 2x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 1\\ y = -1\end{cases}$

2) Phương trình $x^2 - x - 3 = 0$ có a, c trái dấu nên có hai nghiệm phân biệt x_1; x_2.
Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có: $x_1 + x_2 = 1$ và $x_1x_2 = -3$.

Do đó: $P = \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}$.

Câu 3: Gọi x (km/h) là vận tốc của xe lửa thứ nhất đi từ Huế đến Hà Nội.
Khi đó vận tốc của xe lửa thứ hai đi từ Hà Nội là: x + 5 (km/h) (ĐK: x > 0)

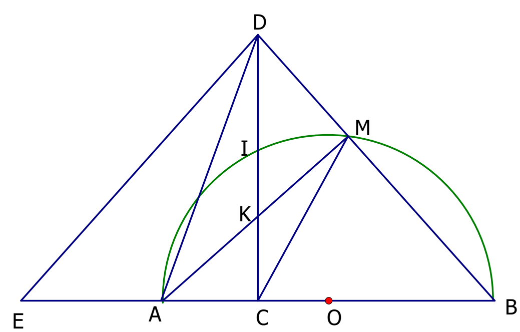
Theo giả thiết, ta có phương trình: $\frac{300}{x+5}+\frac{5}{3}=\frac{345}{x}$

$\Leftrightarrow 900x+5x\left(x+5\right)=1035\left(x+5\right)\Leftrightarrow x^2-22x-1035=0$

Giải phương trình ta được: $x_1=-23$ (loại vì x > 0) và $x_2=45>0$.

Vậy vận tốc xe lửa thứ nhất là: 45 km/h và vận tốc xe lửa thứ hai là: 50 km/h

Câu 4:



1) Ta có: $\widehat{AMB}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{AMD}=90^0$. Tứ giác ACMD có $\widehat{AMD}=\widehat{ACD}=90^0$, suy ra ACMD nội tiếp đường tròn đường kính AD.

2) ΔABD và ΔMBC có: $\widehat{B}$ chung và $\widehat{BAD}=\widehat{BMC}$ (do ACMD là tứ giác nội tiếp).
Suy ra: $\Delta ABD \sim \Delta MBC$ (g – g)

3) Lấy E đối xứng với B qua C thì E cố định và $\widehat{EDC}=\widehat{BDC}$, lại có: $\widehat{BDC}=\widehat{CAK}$ (cùng phụ với $\widehat{B}$), suy ra: $\widehat{EDC}=\widehat{CAK}$. Do đó AKDE là tứ giác nội tiếp. Gọi O’ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAKD thì O’ củng là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác AKDE nên $O'A = O'E$, suy ra O' thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AE cố định.

Câu 5:

$A=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}+\frac{1}{2xy}$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương ta có:

$x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow 1 \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow 1 \geq 4xy \Rightarrow \frac{1}{2xy} \geq 2$ (1)

Đẳng thức xảy ra khi x = y.

Tương tự với a, b dương ta có:

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}} \geq 2.\frac{2}{a+b} = \frac{4}{a+b}$ (*)

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có: $\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{2xy} \geq \frac{4}{\left(x+y\right)^2} = 4$ (2)

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x^2 + y^2 = 2xy \Leftrightarrow x = y$.

Từ (1) và (2) suy ra: $A \geq 6$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$. Vậy minA = 6.

ĐỀ SỐ 28

Câu 1:

1) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 3y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 3y = 21 \\ x - 3y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 14 \\ y = 7 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

2) Phương trình $3x^2 - x - 2 = 0$ có các hệ số a và c trái dấu nên luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2.

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = \frac{1}{3}$ và $x_1.x_2 = -\frac{2}{3}$.

Do đó P = $x_1^2 + x_2^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 = \frac{1}{9} + \frac{4}{3} = \frac{13}{9}$.

Câu 2.

1) $A = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)}\right) : \frac{\sqrt{a}-1}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \quad = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1} - \frac{1}{\sqrt{a}+1}\right).\left(\sqrt{a}+1\right) = \sqrt{a} - 1$

2) $A < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, a \neq 1 \\ \sqrt{a} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < 1$.

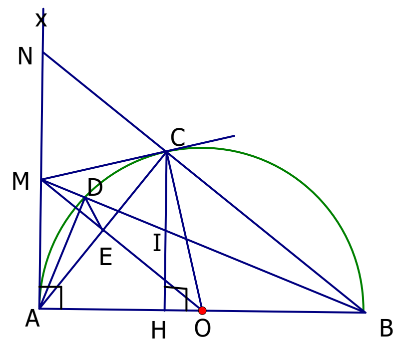
Câu 3:

1) Ta có $\Delta' = m^2 + 1 > 0, \forall m \in R$. Do đó phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

2) Theo định lí Vi-ét thì: $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1.x_2 = -1$. Ta có: $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1.x_2 = 7 \Rightarrow 4m^2 + 3 = 7 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Câu 4:



1) $\widehat{ADB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{ADM} = 90^0$ (1)

Lại có: OA = OC = R; MA = MC (tính chất tiếp tuyến). Suy ra OM là đường trung trực của AC $\Rightarrow \widehat{AEM} = 90^0$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra MADE là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính MA.

2) Xét ΔMAB vuông tại A có $AD \perp MB$, suy ra: $MA^2 = MB.MD$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

3) Kéo dài BC cắt Ax tại N, ta có $\widehat{ACB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{ACN} = 90^0$, suy ra ΔACN vuông tại C. Lại có MC = MA nên suy ra được MC = MN, do đó MA = MN (5).

Mặt khác ta có CH // NA (cùng vuông góc với AB) nên theo định lí Ta-lét thì $\frac{IC}{MN} = \frac{IH}{MA}\left(= \frac{BI}{BM}\right)$ (6) với I là giao điểm của CH và MB.

Từ (5) và (6) suy ra IC = IH hay MB đi qua trung điểm của CH.

Câu 5: Điều kiện: $x \neq 0,\ x - \frac{1}{x} \geq 0,\ 2x - \frac{5}{x} \geq 0.$ (*)

$$\frac{4}{x} + \sqrt{x - \frac{1}{x}} = x + \sqrt{2x - \frac{5}{x}} \Leftrightarrow x - \frac{4}{x} = \sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{2x - \frac{5}{x}}$$

$$x - \frac{4}{x} = \frac{\frac{4}{x} - x}{\sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{2x - \frac{5}{x}}} \Leftrightarrow \left(x - \frac{4}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{2x - \frac{5}{x}}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{4}{x} = 0 \ \left(\text{vì } 1 + \frac{1}{\sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{2x - \frac{5}{x}}} > 0\right)$$

$\Leftrightarrow x = \pm 2$.

Đối chiếu với điều kiện (*) thì chỉ có $x = 2$ thỏa mãn.

ĐỀ SỐ 29

Câu 1: a) Đường thẳng d đi qua gốc tọa độ khi và chỉ khi $2m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

b) Đồ thị hàm số $y = (m^2 - m)x^2$ đi qua điểm A(-1; 2) $\Leftrightarrow 2 = (m^2 - m).(-1)^2$

$\Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -1\,;\, m = 2$

Câu 2:

a) $P = \left(\dfrac{1}{\sqrt{a}-3} + \dfrac{1}{\sqrt{a}+3}\right)\left(1 - \dfrac{3}{\sqrt{a}}\right) = \dfrac{\sqrt{a}+3+\sqrt{a}-3}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)}.\dfrac{\sqrt{a}-3}{\sqrt{a}}.$

$= \dfrac{2\sqrt{a}.(\sqrt{a}-3)}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3).\sqrt{a}} = \dfrac{2}{\sqrt{a}+3}$. Vậy $P = \dfrac{2}{\sqrt{a}+3}$.

b) Ta có: $\dfrac{2}{\sqrt{a}+3} > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{a} + 3 < 4 \Leftrightarrow \sqrt{a} < 1 \Leftrightarrow 0 < a < 1$..

Vậy $P > \dfrac{1}{2}$ khi và chỉ khi $0 < a < 1$.

Câu 3: Gọi x, y là thời gian mỗi người cần để một mình hoàn thành công việc (x, y > 0 tính bằng giờ). Trong 1 giờ mỗi người làm được $\dfrac{1}{x};\dfrac{1}{y}$ công việc, cả 2 làm trong 1 giờ được $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{4}$ công việc.(vì hai người hoàn thành công việc trong 4 giờ). Do người thứ nhất làm ít hơn người thứ hai là 6 giờ nên y - x = 6.

Ta có hệ phương trình.

$$\begin{cases} y - x = 6 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 6 & (1) \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+6} = \dfrac{1}{4} & (2) \end{cases}$$

Giải (2): (2) <=> $x(x + 6) = 4(x + x + 6)$ <=> $x^2 - 2x - 24 = 0$

<=> x = 6 (t/m); x = - 4 (loại vì x > 0). Thay vào (1) được y = 12

Vậy để hoàn thành công việc người thứ nhất cần 6 giờ, người thứ hai cần 12 giờ.

Câu 4:

a) Ta có $\widehat{BAC} = 90^0$ (vì góc nội tiếpchắn nửa đường tròn)

Tương tự có $\widehat{BDH} = \widehat{CEH} = 90^0$

Xét tứ giác ADHE có $\widehat{A} = \widehat{ADH} = \widehat{AEH} = 90^0$ => ADHE là hình chữ nhật.

Từ đó DE = AH mà $AH^2 = BH.CH$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông)

hay $AH^2 = 10 . 40 = 20^2$ (BH = 10; CH = 2.25 - 10 = 40) => DE = 20

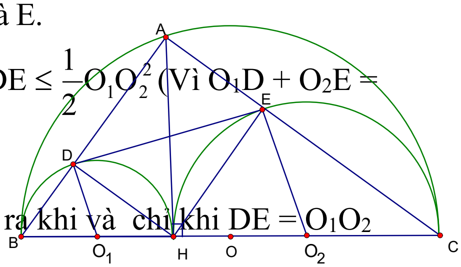
b) Ta có: $\widehat{BAH} = \widehat{C}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) mà $\widehat{DAH} = \widehat{ADE}$ (1)

(Vì ADHE là hình chữ nhật) => $\widehat{C} = \widehat{ADE}$ do $\widehat{C} + \widehat{BDE} = 180^0$ nên tứ giác BDEC nội tiếp đường tròn.

c) Vì $O_1D = O_1B$ => ΔO_1BD cân tại O_1 => $\widehat{B} = \widehat{BDO_1}$ (2)

Từ (1), (2) => $\widehat{ADE} + \widehat{BDO_1} = \hat{B} + \widehat{BAH} = 90^0$ => O_1D // O_2E

Vậy DEO_2O_1 là hình thang vuông tại D và E.



Ta có $S_{ht} = \frac{1}{2}(O_1D + O_2E).DE = \frac{1}{2}O_1O_2.DE \le \frac{1}{2}O_1O_2^2$ (Vì $O_1D + O_2E = O_1H + O_2H = O_1O_2$ và $DE \le O_1O_2$)

$S_{ht} \le \frac{1}{2}O_1O_2{}^2 = \frac{BC^2}{8} = \frac{R^2}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $DE = O_1O_2$

⇔ DEO_2O_1 là hình chữ nhật

⇔ A là điểm chính giữa cung BC. Khi đó $\max S_{DEO_2O_1} = \frac{R^2}{2}$.

Câu 5: Giải phương trình: $x^3 + x^2 - x = -\frac{1}{3}$ (1)

(1) <=> $3x^3 + 3x^2 - 3x = -1$ <=> $4x^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ <=> $4x^3 = (x - 1)^3$

<=> $x\sqrt[3]{4} = x - 1$ <=> $x(1 - \sqrt[3]{4}) = 1$ <=> $x = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{4}}$.

Vậy phương trình chỉ có 1 nghiệm $x = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{4}}$.

Lời bình:
Câu III

Ta thường gặp bài toán :" Hai máy cày cùng cày một cánh đồng…; hai vòi nước cùng chảy vào một bể…; hai hợp tác cùng đào một con mương…; hai người cùng làm chung một công việc…) v.v" . Ta gọi bài bài trên thuộc loại toán "Làm chung một việc"

Một số lưu ý khi giải bài toán này là

a) – Khối lượng công việc phải hoàn thành được quy ước bằng 1 (đơn vị).

– (Năng suất) × (thời gian) = (khối lượng làm được).

– (Năng suất chung) = (tổng các năng suất riêng).

(Bạn có thể tò mò tại sao lại quy ước khối lượng công việc là 1. Công việc hoàn tất nghĩa là hoàn thành 100% khối lượng công việc. Bởi 100% = 1, đó là điều dẫn tới quy ước trên)

b) Bài toán có thể trình bày lời giải bằng hệ phương trình hai ẩn hoặc bằng phương trình một ẩn.

c) Trong bài toán trên (theo các kí hiệu đã dùng trong lời giải) thì :

– Các năng suất riêng là $\frac{1}{x}$ ***và*** $\frac{1}{y}$

– Năng suất chung : Một mặt được tính là $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, một mặt giả thiết cho là $\frac{1}{4}$. Vậy nên có phương trình $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$

ĐỀ SỐ 30

Câu 1.

1) Phương trình tương đương với $\sqrt{3}x=-\sqrt{75} \Leftrightarrow \sqrt{3}x=-5\sqrt{3} \Leftrightarrow x=-5$

2) Hệ phương trình $\begin{cases}3x-2y=1\\4x+2y=-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7x=-7\\3x-2y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}$.

Câu 2.

1) Với $m=2$ phương trình trở thành $2x^2-5x+2=0$.

$\Delta=5^2-4.2.2=9$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1=2$, $x_2=\frac{1}{2}$.

2) Phương trình có biệt thức $\Delta=(m+3)^2-4.2.m=m^2-2m+9=(m-1)^2+8>0$ với mọi m.

Do đó phương trình luôn có hai nghiệm x_1,x_2. Khi đó theo định lý Viet thì $\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{m+3}{2}\\x_1x_2=\dfrac{m}{2}\end{cases}$.

Biểu thức A $=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\left(\dfrac{m+3}{2}\right)^2-4\dfrac{m}{2}}=$

$\frac{1}{2}\sqrt{m^2-2m+9}=\frac{1}{2}\sqrt{(m-1)^2+8}$.

Do $(m-1)^2\geq 0$ nên $\sqrt{(m-1)^2+8}\geq\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, suy ra A $\geq\sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow m=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\sqrt{2}$, đạt được khi $m=1$.

Câu 3. 1) Ta có $9\sqrt{a}-\sqrt{25a}+\sqrt{4a^3}=9\sqrt{a}-5\sqrt{a}+2a\sqrt{a}=2\sqrt{a}(a+2)$ và $a^2+2a=a(a+2)$

nên P $=\dfrac{2\sqrt{a}(a+2)}{a(a+2)}=\dfrac{2}{\sqrt{a}}$.

2) Gọi vận tốc canô trong nước yên lặng là x (km/h, $x>4$)

Vận tốc ca nô khi nước xuôi dòng là $x+4$ và thời gian ca nô chạy xuôi dòng là $\frac{48}{x+4}$.

Vận tốc ca nô khi nước ngược dòng là $x-4$ và thời gian ca nô chạy ngược dòng là $\dfrac{48}{x-4}$.

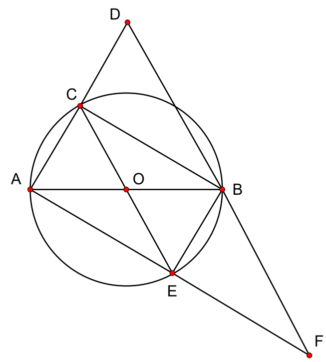
Theo giả thiết ta có phương trình $\dfrac{48}{x+4}+\dfrac{48}{x-4}=5$ (*)

(*) $\Leftrightarrow 48(x-4+x+4)=5(x^2-16) \Leftrightarrow 5x^2-96x-80=0$

Giải phương trình ta được $x=-0,8$ (loại), $x=20$ (thỏa mãn)

Vậy vận tốc ca nô khi nước yên lặng là 20 km/h

Câu 4.



1) Chứng minh Δ ABD cân

Xét Δ ABD có BC $\perp$ DA và CA = CD nên BC vừa là đường cao vừa là trung tuyến của nó.

Vậy Δ ABD cân tại B

2) Chứng minh rằng ba điểm D, B, F cùng nằm trên một đường thẳng.

Vì $\widehat{CAE}=90^0$, nên CE là đường kính của (O).

Ta có CO là đường trung bình của tam giác ABD

Suy ra BD // CO hay BD // CE (1)

Tương tự CE là đường trung bình của tam giác ADF.

Suy ra DF // CE (2). Từ (1) và (2) suy ra D, B, F cùng nằm trên một đường thẳng.

3) Chứng minh rằng đường tròn đi qua ba điểm A, D, F tiếp xúc với đường tròn (O).

Tam giác ADF vuông tại A và theo tính chất của đường trung bình DB = CE = BF $\Rightarrow$ B là trung điểm của DF. Do đó đường tròn qua ba điểm A,D,F nhận B làm tâm và AB làm bán kính. Hơn nữa, vì OB = AB - OA nên đường tròn đi qua ba điểm A, D, F tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại A.

Câu 5.

Vì các số a,b,c dương nên áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số ta có:

$$\sqrt{a(b+c)} \le \frac{a+(b+c)}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}}=\frac{a}{\sqrt{a(b+c)}} \ge \frac{2a}{a+b+c}$$

Tương tự ta cũng có:

$$\sqrt{\frac{b}{c+a}} \ge \frac{2b}{a+b+c},\ \sqrt{\frac{c}{a+b}} \ge \frac{2c}{a+b+c}$$

Cộng các bất đẳng thức cùng chiều trên ta có

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}} \ge \frac{2a+2b+2c}{a+b+c}=2.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b + c \\ b = c + a \\ c = a + b \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0$, không thoả mãn.

Vậy $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}} + \sqrt{\dfrac{b}{c+a}} + \sqrt{\dfrac{c}{a+b}} > 2$.

Lời bình:

Câu II.2

• Các bạn tham khảo thêm một lời giải sau

Gọi x_1, x_2 là các nghiệm nếu có của phương trình . Từ công thức $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \Delta}{2a}$ ***suy ra :***

$|x_1 - x_2| = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \dfrac{\sqrt{(m-1)^2 + 8}}{2} \geq \sqrt{2}$ ***, với mọi m.*** ***(*)***

Kết quả (*) cho thấy $\Delta > 0$, $\forall m$ đồng thời có min$|x_1 - x_2| = \sqrt{2}$, đạt được khi m = 8.

• Lời giải đã giảm bớt tối đa các phép toán, điều ấy đồng hành giảm bớt nguy sơ sai sót.

Câu IV.2

Việc chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng thường được thực hiện bằng cách chứng minh một trong ba điều tương đương sau :

• AB + BC = AC (khi đó B thuộc đoạn thẳng AC).

• Một trong ba điểm ấy là đỉnh một góc bằng 180^0 (chẳng hạn $\widehat{ABC} = 180^0$).

• Một trong ba điểm ấy là điểm chung của hai đoạn thẳng song song (chẳng hạnAB // BC).

• Một trong ba điểm ấy là điểm chung của hai đoạn thẳng cùng tạo với đường thẳng (Δ) có sẵn một góc bằng nhau (chẳng hạn $\widehat{(AB,\Delta)} = \widehat{(AC,\Delta)}$).

ĐỀ SỐ 31

Câu 1: Tính

a) A = $\sqrt{20} - 3\sqrt{18} - \sqrt{45} + \sqrt{72} = \sqrt{4.5} - 3\sqrt{9.2} - \sqrt{9.5} + \sqrt{36.2} =$

$= 2\sqrt{5} - 9\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + 6\sqrt{2} = -3\sqrt{2} - \sqrt{5}$.

b) B = $\sqrt{4 + \sqrt{7}} + \sqrt{4 - \sqrt{7}}$

$\sqrt{2}B = \sqrt{8 + 2\sqrt{7}} + \sqrt{8 - 2\sqrt{7}} = \sqrt{(\sqrt{7}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{7}-1)^2} = \sqrt{7} + 1 + \left|\sqrt{7} - 1\right|$

$\sqrt{2}B = 2\sqrt{7} \Leftrightarrow B = \sqrt{14}$

c) C = $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$ với x $\geq$ 1

C = $\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}=\sqrt{x-1}+1+\left|\sqrt{x-1}-1\right|$

+) Nếu $x \geq 2$ thì C = $\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1=2\sqrt{x-1}$

+) Nếu $x < 2$, thì C = $\sqrt{x-1}+1+1-\sqrt{x-1}=2$.

Câu 2: a) Hàm số y = (2m - 1)x - m + 2 nghịch biến trên R

khi và chỉ khi 2m - 1 > 0 <=> m > $\frac{1}{2}$

b) Đồ thị hàm số đi qua A (1; 2) khi: 2 = (2m - 1).1 - m + 2 <=> m = 1.
Vậy hàm số y = x + 1

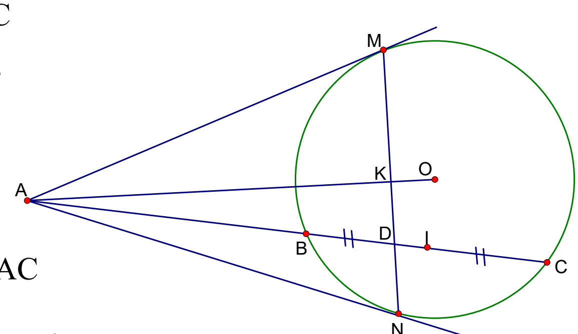
Câu 3: Gọi x, y là thời gian người thợ thứ nhất và người thợ thứ 2 làm một mình (x, y > 0, tính bằng giờ).
- Một giờ mỗi người làm được $\frac{1}{x}$; $\frac{1}{y}$ công việc cả 2 người làm được $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{16}$. (vì 2 người làm trong 16 giờ thì xong công việc)
- Trong 3 giờ người thứ nhất làm được $\frac{3}{x}$ (CV), 6 giờ người 2 làm được $\frac{6}{y}$ (CV) vì cả hai làm được $\frac{1}{4}$ (CV) nếu ta có $\frac{3}{x}+\frac{6}{y}=\frac{1}{4}$

Do đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{16}\\ \frac{3}{x}+\frac{6}{y}=\frac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{3}{x}+\frac{3}{y}=\frac{3}{16}\\ \frac{3}{x}+\frac{6}{y}=\frac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{3}{y}=\frac{1}{16}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{16}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=24\\ y=48\end{cases}.$$

Vậy người thứ nhất hoàn thành công việc trong 24 giờ
người thứ hai hoàn thành công việc trong 48 giờ

Câu 4: a) Xét Δ ABM và Δ AMC



Có góc A chung; $\widehat{AMB}=\widehat{MCB}$

(= $\frac{1}{2}$ sđ cung MB)

=> Δ AMB ~ Δ ACM (g.g)

=> $\frac{AM}{AC}=\frac{AB}{AM}$ => AM^2 = AB.AC

b) Tứ giác AMON có $\widehat{M}+\widehat{N}=180^0$

(Vì $\widehat{M} = \widehat{N} = 90^0$ tính chất tiếp tuyến)
=> AMON là tứ giác nội tiếp được
- Vì OI $\perp$ BC (định lý đường kính và dây cung)
Xét tứ giác AMOI có $\widehat{M} + \hat{I} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ => AMOI là tứ giác nội tiếp được
c) Ta có OA $\perp$ MN tại K (vì K trung điểm MN), MN cắt AC tại D.
Xét tứ giác KOID có $\widehat{K} + \hat{I} = 180^0$ => tứ giác KOID nội tiếp đường tròn tâm O_1
=> O_1 nằm trên đường trung trực của DI mà AD.AI = AK.AO = AM^2 = AB.AC không đổi (Vì A, B, C, I cố định).
Do AI không đổi => AD không đổi => D cố định.
Vậy O_1 tâm đường tròn ngoại tiếp Δ OIK luôn thuộc đường trung trực của DI cố định.

Câu 5:

Ta có: $(2x+1)y = x+1 \Leftrightarrow y = \dfrac{x+1}{2x+1} \Leftrightarrow 2y = \dfrac{2x+2}{2x+1} \Leftrightarrow 2y = 1 + \dfrac{1}{2x+1}$ (*)
Xét pt (*): Để x, y nguyên thì 2x +1 phải là ước của 1, do đó:
+ Hoặc 2x +1 =1 $\Leftrightarrow$ x = 0, thay vào (*) được y = 1.
+ Hoặc 2x +1 = -1 $\Leftrightarrow$ x = -1, thay vào (*) được y = 0
Vậy pt đã cho có 2 nghiệm nguyên là: (0; 1) ; (-1; 0).

🖂 **Lời nhắn**.
Câu IV.c Liên hệ với lời bình sau câu 4c đề 1

ĐỀ SỐ 32

Câu 1: 1) P = $(\sqrt{7}+\sqrt{3}-2)(\sqrt{7}-\sqrt{3}+2) = [\sqrt{7}+(\sqrt{3}-2)][\sqrt{7}-(\sqrt{3}-2)]$
= $(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3}-2))^2 = 7 - (3 - 4\sqrt{3} + 4) = 4\sqrt{3}$.
2) Đường thẳng d và d′ song song với nhau khi và chỉ khi:
$\begin{cases} m^2 - 1 = 3 \\ m - 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 4 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$
Câu 2: $x^2 + (2m + 1)x + m^2 + 1 = 0$ (1)
a) Khi m = 1 ta có phương trình: $x^2 + 3x + 2 = 0$
Vì a = 1; b = 3; c = 2 => a - b + c = 0

Vậy phương trình có $x_1 = -1$; $x_2 = -2$

b) Phương trình (1) có 2 nghiệm âm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\Delta \geq 0\\ S < 0\\ P > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2m+1)^2 - 4(m^2+1) \geq 0\\ -(2m+1) < 0\\ m^2+1 > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4m-3 \geq 0\\ 2m+1 > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m \geq \dfrac{3}{4}\\ m > -\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow m \geq \dfrac{3}{4}.$$

Câu 3: Ta có: $a^2 + b^2 \geq 2ab = 1$ (vì $ab = 1$)

$A = (a + b + 1)(a^2 + b^2) + \dfrac{4}{a+b} \geq 2(a + b + 1) + \dfrac{4}{a+b}$

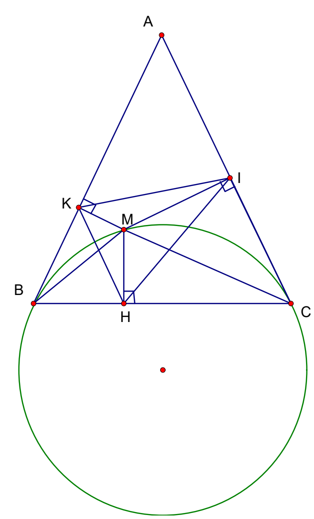
$= 2 + \left(a + b + \dfrac{4}{a+b}\right) + (a + b) \geq 2 + 4 + 2 = 8.$

($a + b + \dfrac{4}{a+b} \geq \sqrt{4}$ và $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ vì áp dụng BĐT Côsi cho 2 số dương)

Dấu "=" khi và chỉ khi $a = b = \dfrac{1}{2}$.

Vậy minA = 8.

Câu 4:



a) Xét tứ giác BHMK: $\widehat{H} + \widehat{K} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

=> Tứ giác BHMK nội tiếp đường tròn.

CM tương tự có tứ giác CHMI cũng nội tiếp được.

b) Ta có $\widehat{B} + \widehat{HMK} = \widehat{C} + \widehat{HMI} = 180^0$

mà $\widehat{B} = \widehat{C} \Rightarrow \widehat{HMK} = \widehat{HMI}$ (1)

$\widehat{KBM} = \widehat{BCM}$, $\widehat{KBM} = \widehat{KHM}$ (vì 2 góc nội tiếp cùng chắn cung MK và góc tạo bởi tia tt ... và góc nội tiếp cùng chắn cung BM).

$\widehat{HCM} = \widehat{HIM}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{HM}$) $\Rightarrow \widehat{KHM} = \widehat{HIM}$ (2).

Từ (1), (2) => $\Delta HMK \sim \Delta IMH$ (g.g) => $\dfrac{MH}{MI} = \dfrac{MK}{MH} \Rightarrow MH^2 = MI.MK$ (đpcm)

c) Ta có PB = PM; QC = QM; AB = AC (Theo t/c hai tiếp tuyến)

Xét chu vi ΔAPQ = AP + AQ + PQ = AP + AQ + PM + QM

= (AP + PB) + (AQ + QC) = AB + AC = 2AB không đổi.

Vì A cố định và đường tròn (O) cho trước nên chu vi ΔAPQ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M (đpcm).

Câu 5: Giả sử hệ $\begin{cases} x^5 - 2y = a & (1) \\ x^2 + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$ có nghiệm là (x; y)

Từ (2) suy ra $|x| \le 1, |y| \le 1$. Từ (1) ta có:

$$\left|x^5 - 2y\right| \le \left|x^5\right| + 2|y| \le \left|x^2\right| + 2|y| = (\left|x^2\right| + \left|y^2\right|) - (\left|y^2\right| - 2|y| + 1) + 1$$

$= 2 - (\left|y^2\right| - 2|y| + 1) = 2 - (|y| - 1)^2 \le 2 \Rightarrow |a| \le 2$ trái giả thiết là $|a| > 2$.

Suy ra hệ trên vô nghiệm, đpcm.

ĐỀ SỐ 33

Câu 1: a) $\begin{cases} -x + 3y = -10 \\ 2x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 6y = -20 \\ 2x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y = -10 \\ y = -3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3(-3) = -10 \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$.

b) Hàm số y = (m + 2) x - 3 đồng biến trên R khi và chỉ khi m + 2 > 0 $\Leftrightarrow$ m > - 2.

Câu 2: a) $A = \left(\frac{a + 1 - 2\sqrt{a}}{a + 1}\right) : \left[\frac{1}{\sqrt{a} + 1} - \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}(a + 1) + (a + 1)}\right]$

$= \frac{(\sqrt{a} - 1)^2}{a + 1} : \left[\frac{1}{\sqrt{a} + 1} - \frac{2\sqrt{a}}{(a + 1)(\sqrt{a} + 1)}\right] = \frac{(\sqrt{a} - 1)^2}{a + 1} : \frac{(\sqrt{a} - 1)^2}{(\sqrt{a} + 1)(a + 1)}$.

$= \frac{(\sqrt{a} - 1)^2}{a + 1} \cdot \frac{(a + 1)(\sqrt{a} + 1)}{(\sqrt{a} - 1)^2} = \sqrt{a} + 1$.

b) $a = 2011 - 2\sqrt{2010} = (\sqrt{2010} - 1)^2 \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{2010} - 1$

Vậy $A = \sqrt{2010}$.

Câu 3: a) Với $k = -\frac{1}{2}$ ta có:

$-\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 3) + 2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0$. Vì a + b + c = 1 + (- 8) + 7 = 0

Nên pt có nghiệm $x_1 = 1$; $x_2 = 7$

b) + Nếu k = 0, phương trình có dạng 2(x - 1) = 0 $\Leftrightarrow$ x = 1

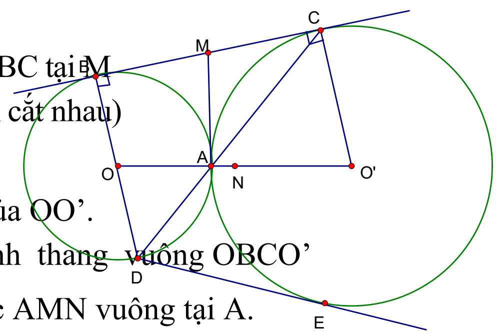
+ Nếu $k \neq 0$, phương trình có dạng: $kx^2 + 2(1 - 2k)x + 3k - 2 = 0$

$\Delta' = (1 - 2k)^2 - k(3k - 2) = 1 - 4k + 4k^2 - 3k^2 + 2k$

$= k^2 - 2k + 1 = (k - 1)^2 \geq 0$ với mọi k.

Vậy phương trình có nghiệm với mọi k.

Câu 4:



a) Qua A vẽ tiếp tuyến chung trong cắt BC tại M

Ta có MB = MA = MC (t/c 2 tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow \widehat{A} = 90^0$.

b) Giả sử R' > R. Lấy N trung điểm của OO'.

Ta có MN là đường trung bình của hình thang vuông OBCO'

(OB // O'C; $\widehat{B} = \widehat{C} = 90^0$) và tam giác AMN vuông tại A.

Có $MN = \dfrac{R + R'}{2}$; $AN = \dfrac{R' - R}{2}$. Khi đó $MA^2 = MN^2 - AN^2 = RR'$

=> $MA = \sqrt{RR'}$ mà $BC = 2MA = 2\sqrt{RR'}$

c) Ta có O, B, D thẳng hàng (vì $\widehat{BAD} = 90^0$; OA = OB = OD)

ΔBDC có $\widehat{DBC} = 90^0$, BA $\perp$ CD, ta có: $BD^2 = DA \cdot DC$ (1)

$\Delta ADE \sim \Delta EDC$ (g.g) => $\dfrac{DE}{DC} = \dfrac{DA}{DE}$ => $DA \cdot DC = DE^2$ (2)

(1), (2) => BD = DE (đpcm).

Câu 5:

Xét $\Delta_1 + \Delta_2 = a_1 - 4b_1 + a_2^2 - 4b_2 = a_1^2 + a_2^2 - 4(b_1 + b_2) \geq a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2$

(vì $a_1a_2 \geq 2(b_1 + b_2)$).

Mà $a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 = (a_1 - a_2)^2 \geq 0$, $\Delta_1 + \Delta_2 \geq 0$

=> Tồn tại Δ_1 hoặc Δ_2 không âm => ít nhất một trong 2 phương trình đã cho có nghiệm.

Lời bình:

Câu III.b

1) Để chứng minh phương trình có nghiệm không phụ thuộc giá trị của k có hai cách giải.

<u>Cách 1</u> (Đã nói ở lời bình sau câu 2(1) Đề 24)

Xem $k(x^2 - 4x - 3) + 2(x - 1) = 0$ (*) là phương trình đối với ẩn k . Thế thì (*) có nghiệm không phụ thuộc k khi và chỉ khi $x^2 - 4x - 3 = 2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

<u>Cách 2</u> (Phương pháp cần và đủ)

+ Phương trình (*) có nghiệm với mọi x ắt phải có nghiệm với k = 0.

+ Với k = 0 ta có $k(x^2 - 4x - 3) + 2(x - 1) \Leftrightarrow x = 1$.

Thay x = 1 vào (*) có 0k + 0 = 0 nghĩa là x = 1 là nghiệm của (*) với mọi k. Ta có điều phải chứng minh.

2) Kết quả một bài toán đâu phải chỉ có là đáp số. Cái quan trọng hơn là cách nghĩ ra lời giải chúng như thế nào, có bao nhiêu con đường (cách giải) để đi đến kết quả đó :

Câu V : ***1) Mấu chốt của bài toán là chuyển hoá hình thức bài toán. Cụ thể ở đây là biết thay thế việc chứng minh ít nhất một trong hai phương trình có nghiệm bằng cách chứng minh $\Delta_1 + \Delta_2 \geq 0$. Sự chuyển hoá này đã giúp kết nối thành công với giả thiết $a_1 + a_2 \geq 2(b_1 + b_2)$.***

2) Một cách hiểu khác của bài toán là :

Chứng minh cả hai phương trình không thể cùng vô nghiệm. Với cách hiểu này ta chuyển hoá thành chứng minh khả năng $\Delta_1 + \Delta_2 < 0$ không thể xảy ra.

Thật vậy: Nếu $\Delta_1 < 0$ và $\Delta_2 < 0$ suy ra $\Delta_1 + \Delta_2 < 0$. Điều này sẽ dẫn tới mâu thuẫn với $a_1 + a_2 \geq 2(b_1 + b_2)$. Bài toán được chứng minh.

3) Các cách chứng minh bài toán trên cũng là cách chứng minh trong nhiều phương trình bậc hai, ít nhất có một phương trình có nghiệm.

4) Cùng một kiểu tư duy ấy bạn dễ dàng chứng minh :

Với mọi giá trị của m, phương trình $x^2 - mx + m = 0$ không thể có hai nghiệm cùng dương.

Thật vậy :

+ Nếu m = 0, phương trình có nghiệm x = 0.

+ Nếu m < 0, phương trình có nghiệm hai nghiệm trái dấu (do ac < 0).

+ Nếu m > 0, nếu cả hai nghiệm x_1, x_2 đều âm thì $x_1 + x_2 < 0$ suy ra $-\frac{b}{a} = m < 0$ (!).

Mâu thuẫn với m > 0.

Vậy là bài toán được chứng minh.

ĐỀ SỐ 34

Câu 1: P = $\left|\sqrt{a-1}+1\right| + \left|\sqrt{a-1}-1\right|$

Nếu a≥ 2 => $\sqrt{a-1} - 1 \geq 0 \Rightarrow P = 2\sqrt{a-1}$

Nếu 1≤ a < 2 => $\sqrt{a-1} - 1 < 0$ => P = 2

Câu 2: ĐKXĐ: x > 0; x $\neq$ 1.

1) Q = $\frac{(x-1)^2}{4x} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)^2 - (\sqrt{x}-1)^2}{x-1} = \frac{(x-1)^2.4\sqrt{x}}{4x.(x-1)} = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$.

2) Q = - 3$\sqrt{x} - 3$ => $4x + 3\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x} = -1 \text{ (loai)} \\ \sqrt{x} = \frac{1}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{1}{16}$ (thỏa mãn)

Câu 3: Đặt $|x| = t$, được $t^2 + 2(m - 1)t + m + 1 = 0$ (1)

Phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt <=> (1) có 2 nghiệm khác dấu hoặc (1) có nghiệm kép t > 0.

+) (1) Có 2 nghiệm khác dấu <=> m + 1 < 0 <=> m < -1

+) $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 3 \end{array}\right.$

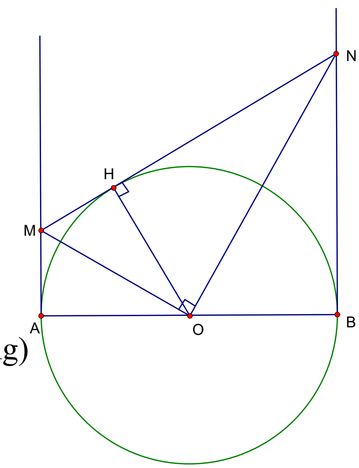
Thay vào (1) để xét thì m = 0 thỏa mãn, m = 3 bị loại.

Vậy m < - 1 hoặc m = 0.

Câu 4: PT <=> $\sqrt{3(x-1)^2 + 16} + \sqrt{(x-1)^2 + 25} = 9 - (x - 1)^2$

VT $\geq$ 9; VP $\leq$ 9 (vì $(x - 1)^2 \geq 0$) nên:

PT <=> $\begin{cases} VT = 9 \\ VP = 9 \end{cases}$ <=> x = 1 (TM)



Câu 5: 1) Gọi H là hình chiếu của O trên đường thẳng MN. Xét tứ giác OAMH

$\widehat{A} + \widehat{H} = 180^0$ (do $\widehat{A} = \widehat{H} = 90^0$)

=> OAMH là tứ giác nội tiếp đường tròn.

Tương tự tứ giác OANH nội tiếp được

=> $\widehat{A_1} = \widehat{M_1}$, $\widehat{B_1} = \widehat{N_1}$ (2 góc nội tiếp chắn 1 cung)

$\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{B_1} = \widehat{M_1} + \widehat{N_1} = 90^0$ => $\widehat{AHB} = 90^0$

=> MN là tiếp tuyến

2) Ta có AM = MH, BN = NH, theo hệ thức lượng trong tam vuông, ta có:

AM. BN = MH . NH = $OH^2 = \dfrac{AB^2}{4}$ (đpcm)

3. $S_{\Delta MON} = \dfrac{1}{2}$ OH . MN $\geq \dfrac{1}{2}$ OH . AB (Vì AMNB là hình thang vuông)

Dấu "=" khi và chỉ khi MN = AB hay H là điểm chính giữa của cung AB.

$\Leftrightarrow$ M, N song song với AB $\Leftrightarrow$ AM = BN = $\dfrac{AB}{2}$.

Vậy $S_{\Delta MON}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi AM = BN = $\dfrac{AB}{2}$.

ĐỀ SỐ 35

Câu 1: $A = \dfrac{\sqrt{(x+3)^2}}{x+3} = \dfrac{|x+3|}{x+3} = \begin{cases} 1 \text{ khi } x > -3 \\ -1 \text{ khi } x < -3 \end{cases}$

Câu 2: a) Bình phương hai vế ta được:

x^2 - 2x + 4 = 4 <=> x(x - 2) = 0 <=> x = 0 hoặc x = 2

b) Đường thẳng (d) có phương trình y = ax + b đi qua điểm A (1; 2) và B (2; 0) khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 2a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=4 \end{cases}$$

Vậy y = - 2x + 4

Câu 3: a) Với m = 2, ta có phương trình

$(x^2 - x - 2)(x - 1) = 0$ <=> $\left[\begin{array}{l} x^2-x-2=0 \\ x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1;\ x=2 \\ x=1 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 3 nghiệm x $\pm$ 1; x = 2

b) Vì phương trình (1) luôn có nghiệm x_1 = 1 nên phương trình (1) có 2 đúng nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:

- Hoặc phương trình f(x) = x^2 - x - m = 0 có nghiệm kép khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+4m=0 \\ 1-1-m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-\dfrac{1}{4} \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{4}.$$

- Hoặc phương trình f(x) = x^2 - x - m = 0 có 2 nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+4m>0 \\ m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-\dfrac{1}{4} \\ m=0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy phương trình (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi m = - $\dfrac{1}{4}$; m = 0.

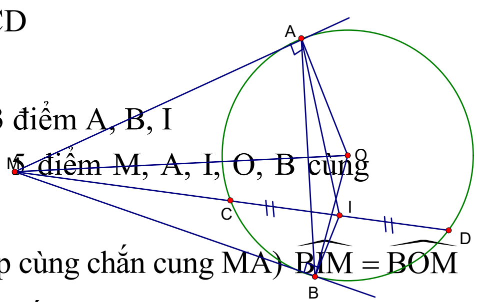
Câu 4:

a) Vì MA, MB là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Nên MA $\perp$ OA; MB $\perp$ OB; Mà OI $\perp$ CD

(Theo định lý đường kính là dây cung).

Do đó $\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = \widehat{MIO} = 90^0$ => 3 điểm A, B, I thuộc đường tròn đường kính MO hay 5 điểm M, A, I, O, B cùng thuộc một đường tròn.



b) Ta có: $\widehat{AIM} = \widehat{AOM}$ (vì 2 góc nội tiếp cùng chắn cung MA) $\widehat{BIM} = \widehat{BOM}$ (vì 2 góc nội tiếp cùng chắn cung MB) mà $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$ (tính chất hai tiếp tuyến)

=> $\widehat{AIM} = \widehat{BIM}$ => IM là phân giác của góc AIB (đpcm).

Câu 5: $\begin{cases} x^4 + y^4 = 1 & (1) \\ x^3 + y^3 = x^2 + y^2 & (2) \end{cases}$

Từ (1) suy ra: $x^4 \le 1 \Rightarrow x \le 1$. Tương tự $y \le 1$ (3).

$(2) \Leftrightarrow x^2(1-x) + y^2(1-y) = 0$ (4), Từ (3) suy ra vế trái của (4) không âm. nên

(4) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2(1-x) = 0 \\ y^2(1-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

Thử lại thì hệ chỉ có 2 nghiệm là: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

ĐỀ SỐ 36

Câu 1: a) P = $\left|1+\sqrt{5}\right| + \left|1-\sqrt{5}\right| = 1 + \sqrt{5} + \sqrt{5} - 1 = 2\sqrt{5}$.

b) $x^2 + 2x - 24 = 0$

$\Delta' = 1 + 24 = 25$ => $\sqrt{\Delta'} = 5$

=> phương trình có 2 nghiệm $x_1 = -1 + 5 = 4$; $x_2 = -1 - 5 = -6$

Câu 2: a) P = $\dfrac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3} + \dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-3} + \dfrac{-7\sqrt{a}-3}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)}$

$= \dfrac{2\sqrt{a}(\sqrt{a}-3) + (\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}+3) - 7\sqrt{a} - 3}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} = \dfrac{2a - 6\sqrt{a} + a + 4\sqrt{a} + 3 - 7\sqrt{a} - 3}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)}$

$= \dfrac{3a - 9\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} = \dfrac{3\sqrt{a}(\sqrt{a}-3)}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} = \dfrac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3}$

Vậy $P = \dfrac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3}$.

b) $P < 1 \Leftrightarrow \dfrac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3} < 1 \Leftrightarrow 3\sqrt{a} < \sqrt{a} + 3 \Leftrightarrow \sqrt{a} < \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 0 \le a < \dfrac{9}{4}$.

Câu 3: a) Với m = 4 ta có $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Đặt $x^2 = t$, với $t \ge 0$ ta có pt $t^2 - 5t + 4 = 0$ <=> $t_1 = 1$; $t_2 = 4$

Từ đó, ta được: $\left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình có 4 nghiệm $x = \pm 1$; $x = \pm 2$.

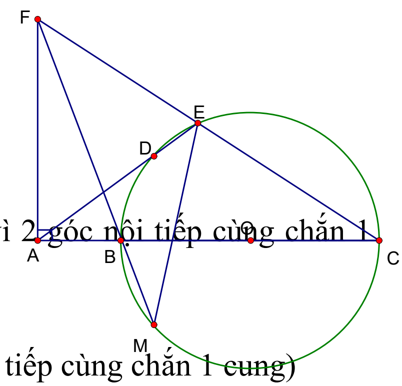
b) $x^4 - 5x^2 + m = 0$ (1) có dạng $f(y) = y^2 - 5y + m = 0$ (2) (với $y = x^2$; $y \geq 0$)

Phương trình (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt <=> phương trình (2):

1) Hoặc có nghiệm kép khác 0 <=> $\begin{cases} \Delta = 0 \\ f(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{25}{4} \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \dfrac{25}{4}$.

2) Hoặc có 2 nghiệm khác dấu $\Leftrightarrow m < 0$.

Vậy m = $\dfrac{25}{4}$ hoặc m < 0 thì phương trình (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt



Câu 4: a) $\widehat{FAB} = 90^0$ (vì AF $\perp$ AB)

$\widehat{BEC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> $\widehat{BEF} = 90^0$. Do đó $\widehat{FAB} + \widehat{BEF} = 180^0$

Vậy tứ giác ABEF nội tiếp đường tròn.

b) Ta có: $\widehat{AFB} = \widehat{AEB} = (\dfrac{1}{2}$ sđ cung AB) (vì 2 góc nội tiếp cùng chắn 1 cung)

$\widehat{AEB} = \widehat{BMD} = (\dfrac{1}{2}$ sđ cung BD) (vì 2 góc nội tiếp cùng chắn 1 cung)

Do đó $\widehat{AFB} = \widehat{BMD}$ => AF // DM mà FA $\perp$ AC => DM $\perp$ AC

c) ΔACF ~ ΔECB (g.g) => $\dfrac{AC}{CE} = \dfrac{CF}{BC}$ => CE.CF = AC.BC (1)

ΔABD ~ ΔAEC (g.g) => $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AD}{AC}$ => AD.AE = AC.AB (2)

(1), (2) => AD.AE + CE.CF = AC(AB + BC) = AC^2 (đpcm)

Câu 5: Ta có y = $\dfrac{2}{1-x} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{(2-2x)+2x}{1-x} + \dfrac{(1-x)+x}{x}$

$= 2 + 1 + \dfrac{2x}{1-x} + \dfrac{1-x}{x} \geq 3 + 2\sqrt{\dfrac{2x}{1-x}.\dfrac{1-x}{x}} = 3 + 2\sqrt{2}$ (áp dụng BĐT Côsi với 2 số dương)

Đẳng thức xảy ra <=> $\dfrac{2x}{1-x} = \dfrac{1-x}{x} \Leftrightarrow x = \sqrt{2} - 1$ (loại nghiệm x = - 1 - $\sqrt{2}$)

Vậy giá trị nhỏ nhất của y bằng 3 + 2$\sqrt{2}$ khi x = $\sqrt{2}$ -1.

🖂 **Lời nhắn**.

Câu IV.c. ***Liên hệ với Lời bình sau câu 4c,đề 6.***

ĐỀ SỐ 37

Câu 1: M = $\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x^3}-1)}{x+\sqrt{x}+1} - \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x^3}+1)}{x-\sqrt{x}+1} + x + 1$

$= \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}+1} - \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{x-\sqrt{x}+1} + x + 1$

$= x - \sqrt{x} - x - \sqrt{x} + x + 1 = x - 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} - 1)^2$

Câu 2: a) $\begin{cases} 3x-5y=-18 \\ x+2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5y=-18 \\ 3x+6y=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11y=33 \\ x+2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất (- 1; 3)

b) Hai đường thẳng (d) và (d') song song khi và chỉ khi:

$\begin{cases} a=3-a \\ b\neq 2-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{3}{2} \\ b\neq 1 \end{cases}$.

Câu 3: a) Khi m = - 3, ta có phương trình $x^2 - 2x - 3 = 0$

Vì a - b + c = 1 - (- 2) + (- 3) = 0 nên $x_1 = -1$; $x_2 = 3$

b) Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$

Khi đó theo hệ thức Viét, ta có: $x_1 + x_2 = 2$ và $x_1x_2 = m$ (1)

$\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2x_2^2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} = 1$ (2)

Từ (1), (2), ta được: $4 - 2m = m^2 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 4 = 0$

$\Delta' = 1 + 4 = 5 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{5}$ nên $m = -1 + \sqrt{5}$ (loại); $m = -1 - \sqrt{5}$ (T/m vì $m \leq 1$).

Vậy giá trị m cần tìm là: $m = -1 - \sqrt{5}$

Câu 4: a) Ta có $\widehat{ACK} = 90^0$

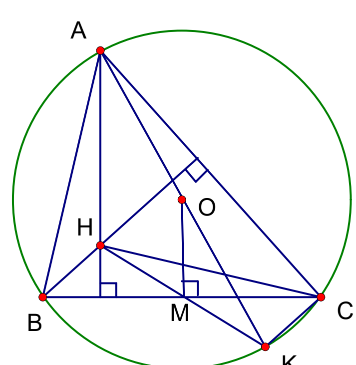
(vì góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Nên CK $\perp$ AC mà BH $\perp$ AC (vì H trực tâm)

=> CK // BH tương tự có CH // BK

=> Tứ giác BHCK là hbh (đpcm)

b) OM $\perp$ BC => M trung điểm của BC



(định lý đường kính và dây cung) => M là trung điểm của HK (vì BHCK là hình bình hành) => đpcm Δ AHK có OM là đường trung bình => AH = 2.OM

c) Ta có $\widehat{AC'C} = \widehat{BB'C} = 90^0$=> tứ giác BC'B'C nội tiếp đường tròn => $\widehat{AC'B'} = \widehat{ACB}$ mà $\widehat{ACB} = \widehat{BAx}$ (Ax là tiếp tuyến tại A) => Ax // B'C'

OA $\perp$ Ax => OA $\perp$ B'C'. Do đó $S_{AB'OC'} = \frac{1}{2}$R.B'C'

Tương tự: $S_{BA'OC'} = \frac{1}{2}$R.A'C'; $S_{CB'OA'} = \frac{1}{2}$R.A'B'

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}$R(A'B' + B'C' + C'A')= $\frac{1}{2}$AA' .BC $\leq \frac{1}{2}$(AO + OM).BC

=> A'B' + B'C' + C'A', lớn nhất khi A, O, M thẳng hàng <=> A là điểm chính giữa cung lớn BC.

Câu 5: $y = \dfrac{x^2+x+1}{x^2+2x+2} \Leftrightarrow y(x^2+2x+2)-(x^2+x+1)=0$

$\Leftrightarrow$ (y - 1)x^2 + (2y - 1)x + (2y - 1) = 0 (1)

- Nếu y = 1 thì x = - 1
- Nếu y $\neq$ 1 thì (1) là phương trình bậc hai đối với x. Để (1) có nghiệm thì phải có

$\Delta = (2y - 1)^2 - 4(y - 1)(2y-1) \geq 0 \Leftrightarrow (2y-1)(2y-3) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$.

$y = \frac{1}{2}$ khi x = 0. Vậy min $y = \frac{1}{2}$..

ĐỀ SỐ 38

Câu 1:

a) Ta có $x^2 + \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x^3}+1) = \sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)$

nên $P = \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{x-\sqrt{x}+1} + 1 - \dfrac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}$

$= \sqrt{x}(\sqrt{x}+1)+1-2\sqrt{x}-1 = x-\sqrt{x}$. Vậy $P = x-\sqrt{x}$.

b) P = 0 $\Leftrightarrow$ $x - \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = 0 \Leftrightarrow$ x = 0 (loại) ; x = 1 (t/m)

Vậy x = 1 thì P = 0

Câu 2: a) Ta có $\sqrt{1-x^2}$ = 1 - x. Đk: $|x| \leq 1$

Bình phương hai vế, ta được phương trình hệ quả: $1 - x^2 = (1 - x)^2$.

<=> $2x^2 - 2x = 0$ <=> $2x(x - 1)$ <=> $x = 0$; $x = 1$

Thay vào pt đã cho thử lại thì cả 2 nghiệm đều thoả mãn.

b) Đk: $x \neq 0$ và $y \neq 0$.

Hệ đã cho tương đương với hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = \frac{5}{2} \\ \frac{4}{x} - \frac{3}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{x} = \frac{7}{2} \\ \frac{4}{x} - \frac{3}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2 - \frac{3}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm (2; 3).

Câu 3: a) Với m = - 1 ta được phương trình:

$x^2 + 4x = 0$ <=> $x(x + 4) = 0$ <=> $x = 0$; $x = - 4$

b) Phương trình (1) có nghiệm khi $\Delta' \geq 0$ <=> $(m - 1)^2 - (m + 1) = m^2 - 3m = m(m - 3) \geq 0$

<=> $m \geq 3$; $m \leq 0$. (1)

Khi đó theo hệ thức Viét ta có: $x_1 + x_2 = 2(m - 1)$ và $x_1x_2 = m + 1$ (2)

Ta có: $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2}$.

nên $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 4 \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 = 6x_1x_2$ (3)

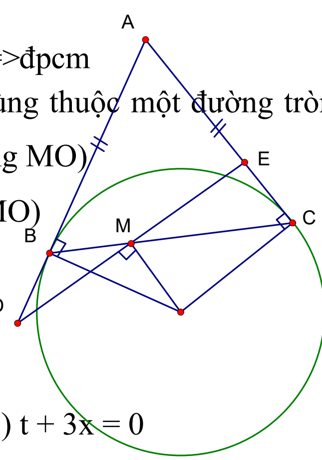
Từ (2). (3) ta được: $4(m - 1)^2 = 6(m + 1)$ <=> $4m^2 - 8m + 4 = 6m + 6$ <=> $2m^2 - 7m - 1 = 0$

$\Delta_m = 49 + 8 = 57$ nên $m = \frac{7 - \sqrt{57}}{4} < 0$; $m = \frac{7 + \sqrt{57}}{4} > 0$.

Đối chiếu đk (1) thì cả 2 nghiệm đều thoả mãn.

Câu 4: a) Ta có: $\widehat{DBO} = \widehat{DMO} = 90^0$ (vì gt)

=> 2 điểm B, M thuộc đường tròn đường kính DO =>đpcm



b) Chứng minh tương tự có 4 điểm O, C, E, M cùng thuộc một đường tròn

=> $\widehat{MEO} = \widehat{MCO}$ (vì 2 góc nội tiếp cùng chắn cung MO)

$\widehat{MBO} = \widehat{MDO}$ (vì 2 góc nội tiếp cùng chắn cung MO)

Mà $\widehat{MBO} = \widehat{MCO}$ (vì Δ BOC cân tại O)

=> $\widehat{MEO} = \widehat{MDO}$ => Δ DOE cân tại O

Mà $MO \perp DE$ nên MD = ME (đpcm)

Câu 5: Đặt $\sqrt{x^2 + 1} = t$, với $t > 0$, ta có $t^2 - (x + 3)t + 3x = 0$

Xem pt trên là pt bậc 2 đối với t.

$\Delta = (x + 3)^2 - 12x = (x - 3)^2$

$t_1 = \dfrac{x+3+x-3}{2} = x$; $t_2 = \dfrac{x+3-x+3}{2} = 3$

Do đó: - Hoặc: $\sqrt{x^2+1} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2+1 = x^2 \end{cases}$ vô nghiệm.

- Hoặc: $\sqrt{x^2+1} = 3 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = \pm 2\sqrt{2}$.

ĐỀ SỐ 39

Câu 1: (2 điểm)

1) Tính: $\sqrt{48} - 2\sqrt{75} + \sqrt{108} = \sqrt{16 \,.\, 3} - 2\sqrt{25 \,.\, 3} + \sqrt{36 \,.\, 3}$

$= 4\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 0$

2) Rút gọn biểu thức: $P = \left(\dfrac{1}{1 - \sqrt{x}} - \dfrac{1}{1 + \sqrt{x}}\right) . \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$= \left(\dfrac{1 + \sqrt{x} - 1 + \sqrt{x}}{1 - x}\right)\left(\dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}\right) = \dfrac{2\sqrt{x}}{1 - x} . \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} = \dfrac{-2}{1 + \sqrt{x}}$

Câu 2:1) Đường thẳng y = ax + b đi qua 2 điểm M (3; 2) và N(4; -1) nên:

$\begin{cases} 2 = 3a + b \\ -1 = 4a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 11 \end{cases}$

2) Giải hệ pt:

$\begin{cases} 2x+5y=7 \\ 3x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5y=7 \\ 15x-5y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17y = 17 \\ 3x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

Câu 3:

1) Khi m = 2, phương trình (1) trở thành: $x^2 - 4x - 12 = 0$

$\Delta' = 16$, pt đã cho có 2 nghiệm: x = - 2; x = 6.

2) Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m \Leftrightarrow m \leq -6;\ m \geq 0$ (2)

Khi đó, theo hệ thức Vi ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = -6m \end{cases}$ (3)

Phương trình có 1nghiệm gấp 2 lần nghiệm kia khi và chỉ khi:

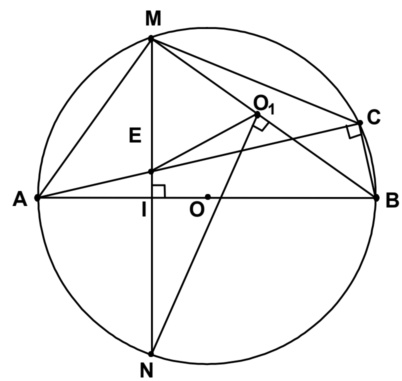
$x_1 = 2x_2;\ x_2 = 2x_1 \Leftrightarrow (x_1 - 2x_2)(x_2 - 2x_1) = 0 \Leftrightarrow 5x_1x_2 - 2(x_1^2 + x_2^2) = 0$

$\Leftrightarrow 5x_1x_2 - 2[(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2] = 0 \Leftrightarrow 9x_1x_2 - 2(x_1+x_2)^2 = 0$ (4)

Từ (3), (4), ta có: $-54m - 8m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0;\ m = -\dfrac{27}{4}$ (thỏa mãn đk (2))

Vậy các giá trị m cần tìm là $m = 0;\ m = -\dfrac{27}{4}$.

Câu 4:



1. Theo giả thiết MN $\perp$AB tại I

$\widehat{ACB} = 90^0$ hay $\widehat{ECB} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{EIB} + \widehat{ECB} = 180^0$

mà đây là hai góc đối của tứ giác IECB nên tứ giác IECB là tứ giác nội tiếp.

2. Theo giả thiết MN $\perp$AB, suy ra A là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{MN}$ nên $\widehat{AMN} = \widehat{ACM}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) hay $\widehat{AME} = \widehat{ACM}$, lại có $\widehat{CAM}$ là góc chung do đó tam giác AME đồng dạng với tam giác ACM $\Rightarrow \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AE}{AM} \Rightarrow AM^2 = AE.AC$.

3. Theo trên $\widehat{AMN} = \widehat{ACM} \Rightarrow$ AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔECM. Nối MB ta có $\widehat{AMB} = 90^0$, do đó tâm O_1 của đường tròn ngoại tiếp ΔECM phải nằm trên BM.

Ta thấy NO_1 nhỏ nhất khi NO_1 là khoảng cách từ N đến BM $\Rightarrow NO_1 \perp BM$. Gọi O_1 là chân đường vuông góc kẻ từ N đến BM ta được O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp Δ ECM có bán kính là O_1M.

Do đó để khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp Δ ECM là nhỏ nhất thì C phải là giao điểm của đường tròn (O_1), bán kính O_1M với đường tròn (O) trong đó O_1 là hình chiếu vuông góc của N trên BM.

Câu 5: Từ $2x + 3y \le 6 \Rightarrow y \le 2 - \dfrac{2}{3}x \Rightarrow -y \ge \dfrac{2}{3}x - 2$

$K = x^2 - 2x - y \ge x^2 - 2x + \dfrac{2x}{3} - 2 = (x - \dfrac{2}{3})^2 - \dfrac{22}{9} \ge \dfrac{-22}{9}$

Suy ra : $\min K = \dfrac{-22}{9}$ khi $\mathbf{x = \dfrac{2}{3}\ ;\ y = \dfrac{14}{9}}$

Ta có : $2x^2 + xy \le 4x \quad (x \ge 0)$

$\Rightarrow x^2 - 2x - y \le -\dfrac{xy}{2} - y = \dfrac{-y(x+2)}{2} \le 0$

Suy ra : max K = 0 khi $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Lời bình :
Câu V

• Nhiều khi tìm trực tiếp GTNN của biểu thức K thật khó khăn. "Cái khó ló cái khôn", người ta bắc cầu K qua biểu thức B (bé hơn) theo sơ đồ "bé dần": $K \geq B$. Rồi đi tìm GTNN của B, từ đó mà suy ra GTNN của biểu thức K. Các mối liên hệ giữa K và giả thiết sẽ chỉ dẫn chúng ta tìm đến B.
+ Trong bài toán trên, thấy trong biểu thức $K = x^2 - 2x - y$ có chứa $-y$, nên để thuận theo sơ đồ "bé dần" ta biến đổi :

$$2x + 3y \leq 6 \quad \Leftrightarrow \quad -y \geq \frac{2x}{3} - 2$$

Thay $-y$ bởi $\frac{2x}{3} - 2$ ta có $K \geq B = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{22}{9}$.

• Cũng vậy, đối với tìm GTLN thì việc bắc cầu phải theo sơ đồ "lớn dần": $K \leq L$

+ Trong các giả thiết không thể suy ra $-y \leq h(x)$ để tìm L (lớn hơn) trong sơ đồ "lớn dần" . Vậy nên để có biểu thức L buộc phải đánh giá bộ phận còn lại $x^2 - 2x \leq g(x)$.

Ta có $2x + y \leq 4 \Leftrightarrow x - 2 \leq \frac{y}{2} \overset{x \geq 0}{\Leftrightarrow} x^2 - 2x \leq \frac{xy}{2}$. (ở đây $g(x) = \frac{xy}{2}$)

Thay $x^2 - 2x$ bởi $\frac{xy}{2}$ ta có $K \leq L = -\frac{y}{2}(x + 2)$.

• Chắc chắn bạn còn thắc mắc là bài toán có hai giả thiết, thế nhưng khi tìm GTNN (GTLN) lại sử dụng giả thiết này mà không sử dụng giả thiết kia ?

+ Trong quá trình đánh giá có thể tìm được nhiều biểu thức B. Gọi B_k là một trong số các biểu thức B tìm được và có $\min B_k = \beta$. Thế thì β chưa hẳn đã là GTNN của K. Chỉ trong trường hợp khi $\min B_k = \beta$ mà ta cũng có $K = B_k$ (hoá giải được dấu "=" trong sơ đồ "lớn hơn") thì mới có $\min K = \min B_k = \beta$. Trong trường hợp đó biểu thức B_k được gọi là "kết". Lời giải chỉ thành công khi tìm được "kết". Trong bài toán trên, sử dụng giả thiết còn lại không dẫn tới "kết".

Tình huống cũng tương tự đối với việc tìm biểu thức L. Biểu thức L dẫn tới maxK cũng được gọi là "kết".

+ Trong bài toán trên, hình thức các giả thiết chưa đủ để chỉ dẫn "bắt mạch" sử dụng giả thiết này hay giả thiết kia. Nhiều bài toán phức tạp có thể cần sự kết hợp của tất cả các giả thiết mới tìm được "kết".

• Mấu chốt của bài toán tìm GTNN, GTLN là tìm "kết".

Nhìn lại kết của các đề trước :

+ Câu 5, đề 1, "kết" chính là biểu thức phải tìm GTNN.

+ Câu 5, đề 11, "kết" là $B_k = \frac{3}{2}(x+y) + \left(\frac{3}{2}x + \frac{6}{x}\right) + \left(\frac{1}{2}y + \frac{8}{y}\right)$.

+ Câu 5, đề 32, "kết" là $B_k = \Delta_1 + \Delta_2$.

ĐỀ SỐ 40

Câu 1. a) $3x + 4y = 2 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$, nên hệ số góc của đường thẳng d là $k = -\frac{3}{4}$.

b) $d \,//\, d_1 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 = -\frac{3}{4} \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = \frac{1}{4} \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm\frac{1}{2} \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.

Vậy với $m = -\frac{1}{2}$ thì $d_1 \,//\, d$.

Câu 2. Hệ phương trình $\begin{cases} ax + by = 3 \\ bx - ay = 11 \end{cases}$ có nghiệm $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$ nên $\begin{cases} a.3 + b(-1) = 3 \\ b.3 - a(-1) = 11 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b = 3 \\ a + 3b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a - 3b = 9 \\ a + 3b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a = 20 \\ a + 3b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 3a - b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$.

Câu 3.

a) Do $ac = (1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3}) = 1 - 3 = -2 < 0$ nên phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt.

b) Vì x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (1) nên theo hệ thức Vi-et, ta có:

$x_1 + x_2 = \frac{2}{1+\sqrt{3}}$, $x_1 x_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$.

Do đó: $S = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{2}{1-\sqrt{3}} = \frac{2(1+\sqrt{3})}{-2} = -(1+\sqrt{3})$.

và $P = \frac{1}{x_1}.\frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{-2} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} = -(2+\sqrt{3})$.

Vậy phương trình bậc 2 cần tìm là: $X^2 + (1+\sqrt{3})X - (2+\sqrt{3}) = 0$.

Câu 4.

a) Tam giác ADE cân tại A vì AD = AE. Lại có:

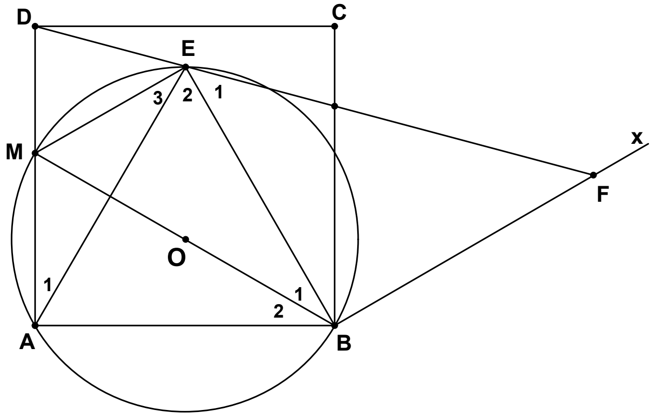
$\widehat{A_1} = \widehat{DAB} - \widehat{EAB} = 90^0 - 60^0 = 30^0$

Do đó

$\widehat{ADE} = \widehat{AED} = \frac{1}{2}(180^0 - 30^0) = 75^0$.

b) Từ giả thiết, dễ thấy tam giác BEF vuông cân tại B, nên $\widehat{E_1} = 45^0$.

Từ đó ta có:



$\widehat{DEF} = \widehat{DEA} + \widehat{E_2} + \widehat{E_1} = 75^0 + 60^0 + 45^0 = 180^0$ suy ra 3 điểm D, E, F thẳng hàng, đpcm.

c) Ta có: $\widehat{B_1} = \widehat{A_1}$ (cùng chắn cung EM) suy ra $\widehat{B_1} = 30^0$ nên $\widehat{B_2} = 30^0$.

Mà $\widehat{E_3} = \widehat{B_2}$ nên $\widehat{E_3} = 30^0$.

Vậy $\widehat{E_2} + \widehat{E_3} = 60^0 + 30^0 = 90^0$ hay ME $\perp$ EB. Mặt khác BF $\perp$ EB do đó ME // BF.

Câu 5. Từ (1) ta có: $x^3 = -2(y-1)^2 - 1 \le -1 \Rightarrow x \le -1$ (3)

Từ (2) ta có: $x^2 = \frac{2y}{y^2+1} \le 1 \Rightarrow x^2 \le 1 \Rightarrow -1 \le x \le 1$ (4)

Từ (3) và (4), suy ra x = -1, thay vào hệ đã cho ta được y = 1.

Vậy P = 2.

II - LỚP 10 THPT CHUYÊN

ĐỀ SỐ 1

Câu 1:

a) Đặt $x - \frac{2}{x} = t$ (1), suy ra $x^2 + \frac{4}{x^2} = t^2 + 4$

Khi đó phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 5 \end{array}\right.$.

Lần lượt thay các giá trị của t vào (1) thì phương trình đã cho có 4 nghiệm:

$x_1 = 1$; $x_2 = -2$; $x_3 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}; x_4 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}$

b) Đk: $x \geq -2$ (1)

Đặt $\sqrt{x+5} = a; \sqrt{x+2} = b\ (a \geq 0; b \geq 0)$ (2)

Ta có: $a^2 - b^2 = 3$; $\sqrt{x^2 + 7x + 10} = \sqrt{(x+5)(x+2)} = ab$

Thay vào phương trình đã cho ta được:

$(a - b)(1 + ab) = a^2 - b^2 \Leftrightarrow (a - b)(1 - a)(1 - b) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a - b = 0 \\ 1 - a = 0 \\ 1 - b = 0 \end{array}\right.$ nên $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x+5} = \sqrt{x+2} \text{ (VN)} \\ \sqrt{x+5} = 1 \\ \sqrt{x+2} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = -1 \end{array}\right.$

Đối chiếu với (1) suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất x = - 1.

Câu 2:

a) Đặt $\begin{cases} x = \frac{a}{b^3} \\ y = \frac{b}{c^3} \\ z = \frac{c}{a^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{b^3}{a} \\ \frac{1}{y} = \frac{c^3}{b} \\ \frac{1}{z} = \frac{a^3}{c} \end{cases}$, khi đó do abc = 1 nên xyz = 1 (1).

Từ đề bài suy ra $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \Rightarrow x + y + z = yz + xz + xy$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $xyz + (x + y + z) - (xy + yz + zx) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(y - 1)(z - 1) = 0$.

Vậy tồn tại x =1 chẳng hạn, suy ra $a = b^3$, đpcm.

b) Đặt $\sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}} = a; \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}} = b \Rightarrow x = a + b; a^3 + b^3 = 2; ab = -\frac{1}{3}$.

Ta có: $x^3 = (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

Suy ra: $x^3 = 2 - x \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$. Vì $x^2 + x + 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Câu 3: Áp dụng các BĐT:

$a + b \le \sqrt{2\left(a^2 + b^2\right)}$; $a + b + c \le \sqrt{3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}$

(được suy ra từ bất đẳng thức Bunhiacôpski)

Ta có:

$$\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{2x} \le \sqrt{2\left(1 + x^2 + 2x\right)} = \sqrt{2}\,(x + 1)$$

$$\sqrt{1 + y^2} + \sqrt{2y} \le \sqrt{2\left(1 + y^2 + 2y\right)} = \sqrt{2}\,(y + 1)$$

$$\sqrt{1 + z^2} + \sqrt{2z} \le \sqrt{2\left(1 + z^2 + 2z\right)} = \sqrt{2}\,(z + 1)$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \le \sqrt{3\,(x + y + z)}$$

Lại có: $A = \sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} + \sqrt{1 + z^2} + \sqrt{2x} + \sqrt{2y} + \sqrt{2z}$

$+ \left(2 - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}\right)$

$\Rightarrow A \le \sqrt{2}\,(x + y + z + 3) + \left(2 - \sqrt{2}\right)\sqrt{3\,(x + y + z)}$

$\Rightarrow A \le 6 + 3\sqrt{2}$ (do $x + y + z \le 3$). Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Vậy $\max A = 6 + 3\sqrt{2}$.

Câu 4:

a) Ta có: $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^0$ (tính chất tiếp tuyến) (1)

$AB = AC = \sqrt{OA^2 - OB^2} = R = OB = OC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra ABOC là hình vuông.

b) Theo bài ra ta có: $AD + DE + AE = 2R$ (3).

Suy ra: $DE = BD + CE$ (4).

Vẽ $OM \perp DE$ $(M \in DE)$ (5)

Trên tia đối của tia CA lấy điểm F sao cho

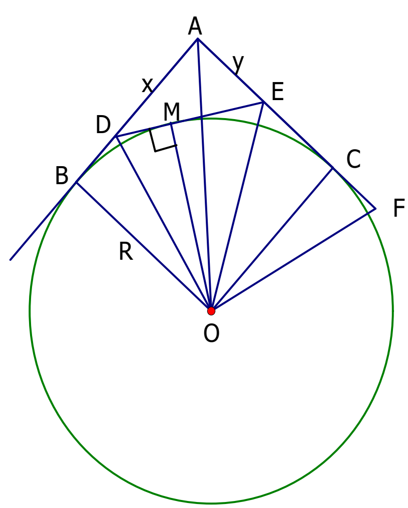
ΔCOF (c-g-c)

$\Rightarrow OD = OF$; lại có $DE = FE$ nên ΔODE =

R

(hai đường cao tương ứng) (6). Từ (5) và

của đường tròn (O;R).



c) Đặt: $AD = x$; $AE = y \Rightarrow S_{ADE} = \frac{1}{2}xy$ (x

Ta có: $DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$ (định lí Pitago).

Vì AD + DE + AE = 2R $\Rightarrow$ $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 2R$ (6)

Áp dụng BĐT – Côsi cho hai số không âm ta có:

$x + y \geq 2\sqrt{xy}$ và $\sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{2xy}$ (7).

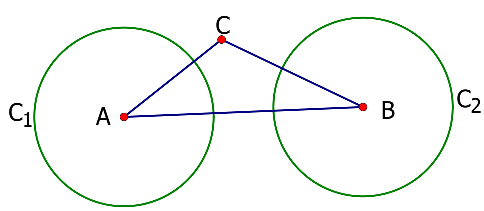
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi x = y.

Từ (6) và (7) suy ra: $2\sqrt{xy} + \sqrt{2xy} \leq 2R \Leftrightarrow \sqrt{xy}\left(2+\sqrt{2}\right) \leq 2R$

$\Leftrightarrow \sqrt{xy} \leq \dfrac{2R}{\left(2+\sqrt{2}\right)} \Leftrightarrow xy \leq \dfrac{2R^2}{3+2\sqrt{2}} \Rightarrow S_{ADE} \leq \dfrac{R^2}{3+2\sqrt{2}} \Leftrightarrow S_{ADE} \leq \left(3 - 2\sqrt{2}\right)R^2$.

Vậy max $S_{ADE} = \left(3-2\sqrt{2}\right)R^2 \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow \Delta ADE$ cân tại A.

Câu 5: Xét điểm A và hình tròn (C_1) có tâm A, bán kính bằng 1.



- Nếu tất cả 98 điểm còn lại đều nằm trong (C_1) thì hiển nhiên bài toán được chứng minh.
- Xét trường hợp có điểm B nằm ngoài (C_1).

Ta có: AB > 1 (1)

Vẽ hình tròn (C_2) tâm B, bán kính bằng 1.

+ Giả sử C là một điểm bất kì khác A và B. Khi đó điểm C thuộc một trong hai hình tròn (C_1) và (C_2). Thật vậy, giả sử C không thuộc hai hình tròn nói trên.

Suy ra: AC > 1 và BC > 1 (2)

Từ (1) và (2) suy ra bộ 3 điểm A, B, C không có hai điểm nào có khoảng cách nhỏ hơn 1 (vô lí vì trái với giả thiết).

Chứng tỏ $C \in (C_1)$ hoặc $C \in (C_2)$. Như vậy 99 điểm đã cho đều thuộc (C_1) và (C_2).

Mặt khác 99 = 49.2 + 1 nên theo nguyên tắc Dirichle ắt phải có một hình tròn chứa không ít hơn 50 điểm.

ĐỀ SỐ 2

Câu 1: a) Theo bài ra ta có:

$\sqrt{2011}(x + y - 2011) = \sqrt{2010}(y - x + 2010)$

+ Nếu x + y - 2011 = 0 thì y - x + 2010 = 0 $\Rightarrow \begin{cases} x-y=2010 \\ x+y=2011 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=4021 \\ 2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2010,5 \\ y=0,5 \end{cases}$

+ Nếu y - x + 2010 = 0 thì x + y - 2011 = 0, ta cũng được kết quả như trên.

+ Nếu x + y - 2011 $\neq$ 0 thì $\sqrt{\dfrac{2011}{2010}} = \dfrac{y-x+2010}{x+y-2011}$ vô lý (vì VP là số hữu tỉ, VT là số vô tỉ)

Vậy x = 2010,5 và y = 0,5 là cặp số duy nhất thoả mãn đề bài.

b) Ta có xy (z + 1) + y(z + 1) + x(z + 1) + (z + 1) = 2012

<=> (z + 1)(xy + y + x + 1) = 2012

<=> (z + 1)[x(y + 1)+(y + 1)] = 2012

<=> (x + 1)(y + 1)(z + 1) = 1.2.2.503 = 503.4.1 . Chỉ có 3 bộ sau thoả mãn:

x = 502, y = 1, z = 1 hoặc x = 1005, y = 1, z = 0 hoặc x = 2011, y = 0, z = 0.

Câu 2: a) Điều kiện: x $\geq$ -1

Đặt a = $\sqrt{x+1}$; b = $\sqrt{x^2-x+1}$

Ta có: $2(a^2 + b^2) = 5ab$ <=> (2a - b)(2b - a) = 0 <=> b = 2a ; a = 2b

Do đó: 1) $2\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2-x+1}$ <=> $4(x + 1) = x^2 - x + 1$

<=> $x^2 - 5x - 3 = 0$ <=> $x_1 = \dfrac{5-\sqrt{37}}{2}$ (loại); $x_2 = \dfrac{5+\sqrt{37}}{2}$

2) $\sqrt{x+1} = 2\sqrt{x^2-x+1} \Leftrightarrow x+1=4(x^2-x+1) \Leftrightarrow 4x^2-5x+3=0$ vô nghiệm.

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x = \dfrac{5+\sqrt{37}}{2}$

b) Vì a, b, c $\in$ [0; 2] nên: (2 - a)(2 - b)(2 - c) $\geq$ 0

<=> 8 - 4(a + b + c) + 2(ab + bc + ca) - abc $\geq$ 0

<=> 2(ab + bc + ca) $\geq$ 4(a + b + c) - 8 + abc

nên 2(ab + bc + ca) $\geq$ 4 (vì a + b + c = 3 và abc $\geq$ 0)

Suy ra $(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \geq 4$

<=> $a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$ (vì $(a + b + c)^2 = 9$)

Dấu "=" xẩy ra khi một trong 3 số a, b, c có một số bằng 2, một số bằng 0 và một số bằng 1.

Câu 3: Giả sử x = $\dfrac{p}{q}$ (p, q $\in$ Z, q > 0) và (p, q) = 1

Ta có $\left(\dfrac{p}{q}\right)^2 + \dfrac{p}{q} + 6 = n^2$ (n $\in$N) <=> $p^2 = q(-P - 6q + n^2q)$

=> q là ước của p^2 nhưng (p, q) = 1 => q = 1 lúc đó x = p

=> $p^2 + p + 6 = n^2$ ($p, n \in Z$)

<=> $(2p + 1)^2 + 23 = 4n^2$ <=> $(2n)^2 - (2p + 1)^2 = 23$

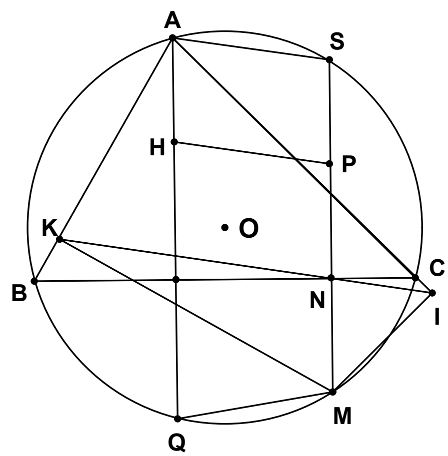
<=> $(2n - 2p - 1)(2n + 2p + 1) = 23$

Do đó $2n - 2p - 1 = 1$ và $2n + 2p + 1 = 23$; $2n - 2p - 1 = 23$ và $2n + 2p + 1 = 1$

(vì $23 \in P$ và $2n + 2p + 1 > 0$ và $2n - 2p - 1 > 0$) <=> $p = 5$ (t/m) ; $p = - 6$ (t/m)

Vậy số hữu tỉ x cần tìm là 5 hoặc – 6

Câu 4:



a) Tứ giác MNKB nội tiếp được (vì $\widehat{K} + \widehat{N} = 180^0$). Tứ giác MNCI cũng nội tiếp được (vì $\widehat{MNC} = \widehat{MIC}$ MNC = 90^0)

=> $\widehat{BNK} = \widehat{BMK}$, $\widehat{INC} = \widehat{IMC}$ (1)

(vì 2 góc nội tiếp cùng chắn một cung).

Mặt khác $\widehat{BMK} = \widehat{IMC}$ (2)

(vì $\widehat{BMK} + \widehat{KMC} = \widehat{KMC} + \widehat{IMC}$ do cùng bù với góc A của tam giác ABC)

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{BNK} = \widehat{INC}$ nên 3 điểm K, N, I thẳng hàng.

b) Vì $\widehat{MAK} = \widehat{MCN} = \beta$ (vì 2 góc nội tiếpcùng chắn cung BM)

=> $\dfrac{AK}{MK} = \dfrac{CN}{MN} = \cot g\beta$ => $\dfrac{AB - BK}{MK} = \dfrac{CN}{MN}$ hay $\dfrac{AB}{MK} - \dfrac{BK}{MK} = \dfrac{CN}{MN}$ (1)

Tương tự có: $\dfrac{AI}{MI} = \dfrac{BN}{MN}$ hay $\dfrac{AC}{MI} + \dfrac{CI}{MI} = \dfrac{BN}{MN}$ (2)

Mà $\dfrac{IC}{MI} = \dfrac{BK}{MK} = tg\alpha$ ($\alpha = \widehat{BMK} = \widehat{IMC}$) (3)

Từ (1), (2), (3) => $\dfrac{AB}{MK} + \dfrac{AC}{MI} = \dfrac{BC}{MN}$ (đpcm)

c) Gọi giao của AH, MN với đường tròn (O) thứ tự là Q, S => AQMS là hình thang cân (vì AQ // MS => AS = QM). Vẽ HP // AS ($P \in MS$)

=> HQMP là hình thang cân, có BN là trục đối xứng (vì Q và H đối xứng qua BC)

=> N là trung điểm của PM mà HP // KN (vì KN // AS do $\widehat{SAC} = \widehat{AIN}$ vì cùng bằng $\widehat{NMC}$) => KN đi qua trung điểm của HM (đpcm).

Câu 5: Đưa về bài toán tìm P để hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 = p \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 4 \end{cases}$ có nghiệm.

Hệ trên $\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2 - 4xy - 4y^2 = 4p \quad (1) \\ px^2 + 2pxy + 3py^2 = 4p \quad (2) \end{cases}$. Lấy (1) - (2), ta có:

$(8 - p)x^2 - 2y(2 + p)x - (4 + 3p)y^2 = 0$ (3)

- Nếu $y = 0 \Rightarrow (8 - p)x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $p = 8 \Rightarrow p = 0; p = 8$.

- Nếu $y \neq 0$ chia 2 vế pt (3) cho y^2 ta có :

$(8 - p)t^2 - 2(2 + p)t - (4 + 3p) = 0$ (4) với $t = \frac{x}{y}$.

+ Nếu p = 8 thì $t = -\frac{7}{5}$.

+ Nếu $p \neq 8$: Phương trình (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = (2 + p)^2 + (8 - p)(4 + 3p) \geq 0$

$\Leftrightarrow p^2 - 12p - 18 \leq 0 \Leftrightarrow 6 - 3\sqrt{6} \leq p \leq 6 + 3\sqrt{6}$. Dấu "=" có xảy ra.

Vậy min P = $6 - 3\sqrt{6}$, max P = $6 + 3\sqrt{6}$.

ĐỀ SỐ 3

Câu 1: a) Từ giả thiết ta có:

$$\frac{a}{b - c} = \frac{b}{a - c} - \frac{c}{a - b} = \frac{ab - b^2 - ac + c^2}{(a - b)(a - c)}$$

Nhân 2 vế của đẳng thức với $\frac{1}{b - c}$ ta có: $\frac{a}{(b - c)^2} = \frac{ab - b^2 - ac + c^2}{(a - b)(a - c)(b - c)}$

Vai trò của a, b, c như nhau, thực hiện hoán vị vòng quanh giữa a, b, c ta có:

$$\frac{b}{(c - a)^2} = \frac{cb - c^2 - ab + a^2}{(a - b)(a - c)(b - c)}, \quad \frac{c}{(a - b)^2} = \frac{ac - a^2 - bc + b^2}{(a - b)(a - c)(b - c)}$$

Cộng vế với vế các đẳng thức trên, ta có $\frac{a}{(b - c)^2} + \frac{b}{(c - a)^2} + \frac{c}{(a - b)^2} = 0$ (đpcm)

b) Đặt $\sqrt[4]{2010} = x \Rightarrow \sqrt{2010} = x^2$; $2010 = x^4$. Thay vào ta có:

$$A = \left(\frac{x^2 - x}{1 - x} + \frac{1 + x^2}{x}\right)^2 - \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}}}{1 + x^2} = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^2}}{1 + x^2}$$

$$= \left(\frac{1}{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 0$$

Câu 2: a) Vì a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác nên a, b, c > 0

Áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$a^2 + bc \geq 2a\sqrt{bc}$, $b^2 + ac \geq 2b\sqrt{ac}$; $c^2 + ab \geq 2c\sqrt{ab}$.

Do đó $\frac{1}{a^2 + bc} + \frac{1}{b^2 + ac} + \frac{1}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a\sqrt{bc}} + \frac{1}{b\sqrt{ac}} + \frac{1}{c\sqrt{ab}}\right)$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}}{abc} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+a}{2}}{abc} = \frac{a+b+c}{2abc}$, đpcm.

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi a = b = c, tức là tam giác đã cho là tam giác đều.

b) Điều kiện $x \geq 0; y \geq 0$

Ta có: $A = (x - 2\sqrt{xy} + y) + 2y - 2\sqrt{x} + 1$

$= [\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 - 2\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right) + 1] - 2\sqrt{y} + 2y$

$= \left(\sqrt{x} - \sqrt{y} - 1\right)^2 + (2y - 2\sqrt{y} + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$

$= \left(\sqrt{x} - \sqrt{y} - 1\right)^2 + \frac{1}{2}\left(2\sqrt{y} - 1\right)^2 - \frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2}$

$A = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} - 1 = 0 \\ 2\sqrt{y} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$

Vậy $\min A = -\frac{1}{2}$

Câu 3: a) Điều kiện : $1 \leq x \leq 5$

Áp dụng BĐT Bunhiacốpski ta có:

$$\left(2\sqrt{x-1}+3\sqrt{5-x}\right)^2 \le \left(2^2+3^2\right)\left(x-1+5-x\right)=13.4$$

$$\Rightarrow\ 2\sqrt{x-1}+3\sqrt{5-x} \le 2\sqrt{13}$$

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $3\sqrt{x-1}=2\sqrt{5-x} \Leftrightarrow x=\dfrac{29}{13}$

Thay vào pt đã cho thử lại thì thỏa mãn..

Vậy pt có nghiệm $x=\dfrac{29}{13}$

b) Xét đẳng thức: $f(x)+3f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x^2 \quad \forall x\ne 0 \quad (1)$

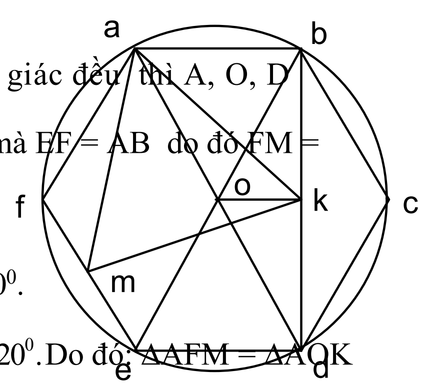
Thay x = 2 vào (1) ta có: $f(2)+3.f\left(\dfrac{1}{2}\right)=4.$

Thay $x=\dfrac{1}{2}$ vào (1) ta có: $f\left(\dfrac{1}{2}\right)+3.f(2)=\dfrac{1}{4}$

Đặt $f(2)=a,\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)=b$ ta có. $\begin{cases} a+3b=4 \\ 3a+b=\dfrac{1}{4} \end{cases}$. Giải hệ, ta được $a=-\dfrac{13}{32}$

Vậy $f(2)=-\dfrac{13}{32}$.

Câu 4:



Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp lục giác đều thì A, O, D thẳng hàng và $OK=\dfrac{1}{2}AB$. Vì $FM=\dfrac{1}{2}EF$ mà EF = AB do đó FM = OK

Ta lại có AF = R $\Rightarrow$ AF = OA và $\widehat{AFM}=120^0$.

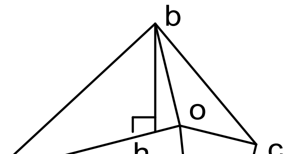
$\widehat{AOK}+\widehat{AOB}=180^0=\widehat{AOK}+60^0 \Rightarrow \widehat{AOK}=120^0$. Do đó: $\Delta AFM=\Delta AOK$ (c.g.c)

$\Rightarrow$ AM = AK, $\widehat{MAK}=60^0 \Rightarrow \Delta AMK$ đều.

Câu 5:

Gọi BH là đường cao của ΔABO

Ta có $2S_{AOB}=OA\,.\,BH$



Nhưng BH ≤ BO nên $2S_{AOB} \le OA \, . \, OB$

mà $OA.OB \le \dfrac{OA^2 + OB^2}{2}$

Do đó $2S_{AOB} \le \dfrac{OA^2 + OB^2}{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $OA \perp OB$ và $OA = OB$

Chứng minh tương tự ta có:

$2S_{BOC} \le \dfrac{OB^2 + OC^2}{2}$; $2S_{COD} \le \dfrac{OC^2 + OD^2}{2}$

$2S_{AOD} \le \dfrac{OD^2 + OA^2}{2}$

Vậy $2S = 2(S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA}) \le \dfrac{2\left(OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2\right)}{2}$

Hay $2S \le OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi OA = OB = OC = OD

và $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOA} = 90^0$ $\Rightarrow$ ABCD là hình vuông tâm O.

Lời bình:

Câu III.b

1) Chắc chắn bạn sẽ hỏi $x = \frac{1}{2}$ từ đâu mà ra?

Gọi A(x), B(x), P(x), Q(x), C(x) là các đa thức của biến x và f(x) là hàm số được xác định bởi phương trình

A(x).f[P(x)] + B(x).f[Q(x)] = C(x) (1)

Để tình giá trị của hàm số f(x) tại điểm x = a ta làm như sau

Bước 1: Giải phương trình Q(x) = P(a) . (2)

Giả sử x = b là một nghiệm của (2).

Bước 2: Thay x = a, x = b vào phương trình (1), và đặt x = f(a), y = f(b). ta có hệ

$$\begin{cases} A(a)x + B(a)y = C(a) \\ B(b)x + A(b)y = C(b) \end{cases} \quad (3)$$

Giải hệ phương trình (3) (đó là hệ phương trình bậc nhất đối với hai ẩn x, y) .

- ***Trong bài toán trên: A(x) = 1, B(x) = 3, P(x) = x, Q(x) = $\frac{1}{x}$, C(x) = x^2, a = 2.***

Phương trình Q(x) = P(a) $\Leftrightarrow \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$***, tức là*** $b = \frac{1}{2}$

Số $x = \frac{1}{2}$ ***được nghĩ ra như thế đó.***

2) Chú ý: Không cần biết phương trình (2) có bao nhiêu nghiệm. Chỉ cần biết (có thể là đoán) được một nghiệm của nó là đủ cho lời giải thành công.

3) Một số bài tập tương tự

a) Tính giá trị của hàm số f(x) tại x = 1 nếu f(x) + 3.f(–x) = 2 + 3x. (với $x \in \mathbb{R}$***).***

b) Tính giá trị của hàm số f(x) tại x = 3 nếu $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$ ***(với 0 ≠ x ≠ 1).***

c) Tính giá trị của hàm số f(x) tại x = 2 nếu $(x-1)f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x-1}$ ***(với 0 ≠ x ≠ 1).***

ĐỀ SỐ 4

Câu 1: a) Từ $x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow 2xy = (x + y)^2 - 4 = (x + y + 2)(x + y - 2)$

Vì $x + y + 2 \neq 0$ nên $\frac{xy}{x+y+2} = \frac{x+y}{2} - 1$ (1)

Áp dụng BĐT Bunhiacopski, ta có:

$x + y \leq \sqrt{2\left(x^2 + y^2\right)} \Rightarrow x + y \leq 2\sqrt{2}$ (2)

Từ (1), (2) ta được: $\frac{xy}{x+y+2} \leq \sqrt{2} - 1$. Dấu "=" khi $\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ x = y \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \sqrt{2}$.

Vậy $\max A = \sqrt{2} - 1$.

b) Vì $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ nên:

$$\frac{2}{x^2+y^2} + \frac{2}{y^2+z^2} + \frac{2}{z^2+x^2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2} + \frac{x^2+y^2+z^2}{y^2+z^2} + \frac{x^2+y^2+z^2}{z^2+x^2}$$

$$= \frac{z^2}{x^2+y^2} + \frac{x^2}{y^2+z^2} + \frac{y^2}{x^2+z^2} + 3$$

Ta có $x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow \frac{z^2}{x^2+y^2} \leq \frac{z^2}{2xy}$,

Tương tự $\frac{x^2}{y^2+z^2} \leq \frac{x^2}{2yz}$, $\frac{y^2}{x^2+z^2} \leq \frac{y^2}{2xz}$

Vậy $\frac{z^2}{x^2+y^2} + \frac{x^2}{y^2+z^2} + \frac{y^2}{x^2+z^2} + 3 \le \frac{z^2}{2xy} + \frac{x^2}{2yz} + \frac{y^2}{2xz} + 3$

$\Leftrightarrow \frac{2}{x^2+y^2} + \frac{2}{y^2+z^2} + \frac{2}{z^2+x^2} \le \frac{x^3+y^3+z^3}{2xyz} + 3$, đpcm.

Câu 2: a) $x^2 + 9x + 20 = 2\sqrt{3x+10}$ (1) .Điều kiện: $x \ge -\frac{10}{3}$ (2)

(1) $\Leftrightarrow (3x + 10 - 2\sqrt{3x+10} + 1) + (x^2 + 6x + 9) = 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{3x+10} - 1)^2 + (x+3)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x+10} - 1 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3$ (thỏa mãn đk (2).

Vậy phương trình (1) có nghiệm x = -3.

b) $\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0 \\ 2x^2 - 4x + 3 = -y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{2x}{x^2+1} & (1) \\ y^3 = -2(x-1)^2 - 1 \end{cases}$

Ta có: $\frac{2x}{1+x^2} \le 1 \Rightarrow y^2 \le 1 \Rightarrow -1 \le y \le 1$ (1)

Mặt khác: $-2(x-1)^2 - 1 \le -1 \Rightarrow y^3 \le -1 \Rightarrow y \le -1$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ y = - 1 nên x = 1. Thay vào hệ đã cho thử lại thì thỏa mãn.

Vậy x = 1 và y = -1 là các số cần tìm.

Câu 3:

a) Đặt $\sqrt[3]{x} = \sqrt{b} > 0$ và $\sqrt[3]{y} = \sqrt{c} > 0$ ta có $x^2 = b^3$ và $y^2 = c^3$

Thay vào gt ta được $\sqrt{b^3 + b^2c} + \sqrt{c^3 + bc^2} = a$

$\Rightarrow a^2 = b^3 + b^2c + c^3 + bc^2 + 2\sqrt{b^2c^2(b+c)^2}$

$a^2 = (b+c)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{a^2} = b + c$ hay $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$, đpcm.

b) Giả sử x_0 là một nghiệm của phương trình, dễ thấy $x_0 \ne 0$.

Suy ra $x_0^2 + ax_0 + b + \frac{a}{x_0} + \frac{1}{x_0^2} = 0 \Leftrightarrow x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} + a\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right) + b = 0$

Đặt $x_0 + \frac{1}{x_0} = y_0 \Rightarrow x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} = y_0^2 - 2$, $|y_0| \ge 2 \Rightarrow y_0^2 - 2 = -ay_0 - b$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpxki ta có:

$$\left(y_0^2 - 2\right)^2 = \left(ay_0 + b\right)^2 \leq \left(a^2 + b^2\right)\left(y_0^2 + 1\right) \Rightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{(y_0^2 - 2)^2}{y_0^2 + 1} \quad (1)$$

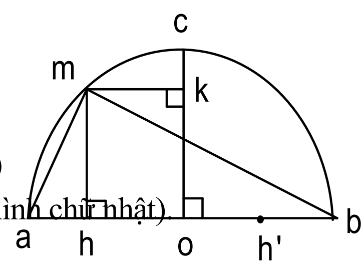
Ta chứng minh $\frac{(y_0^2 - 2)^2}{y_0^2 + 1} \geq \frac{4}{5}$ (2)

Thực vậy: (2) $\Leftrightarrow 5(y_0^4 - 4y_0^2 + 4) \geq 4(y_0^2 + 1) \Leftrightarrow 5y_0^4 - 24y_0^2 + 16 \geq 0$

$\Leftrightarrow 5(y_0^2 - 4)(y_0^2 - \frac{4}{5}) \geq 0$ đúng với $|y| \geq 2$ nên (1) đúng

Từ (1), (2) suy ra $a^2 + b^2 \geq \frac{4}{5} \Rightarrow 5(a^2 + b^2) \geq 4$, đpcm.

Câu 4: Đặt AH = x



Ta có $\widehat{AMB} = 90^0$ (OA = OB = OM)

Trong Δ vuông AMB ta có $MA^2 = AH \cdot AB = 2Rx$

(H là chân đường vuông góc hạ từ M xuống BC)

Mặt khác: $MK^2 = OH^2 = (R - x)^2$ (vì MKOH là hình chữ nhật).

Theo bài ra ta có: $4Rx = 15(R - x)^2$.

Do H $\in$ AB $\Rightarrow$ $O \leq x \leq 2R$

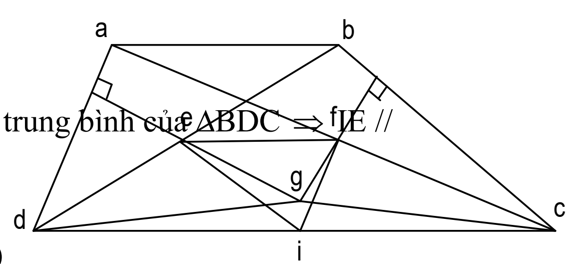
Phương trình trở thành: $15x^2 - 34Rx + 15R^2 = 0$

$\Leftrightarrow (5x - 3R)(3x - 5R) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3R}{5}; x = \frac{5R}{3}$.

Cả 2 giá trị này đều thoả mãn

Vậy ta tìm được 2 điểm H và H' $\Rightarrow$ 2 điểm M và M' là giao điểm của nửa đường tròn với các đường vuông góc với AB dựng từ H và H'.

Câu 5:



Gọi I là trung điểm của CD.

Nối EF, EI, IF, ta có IE là đường trung bình của ΔBDC $\Rightarrow$ IE // BC

Mà GF $\perp$ BC $\Rightarrow$ IE $\perp$ GF (1)

Chứng minh tương tự EG $\perp$ IF (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ G là trực tâm của ΔEIF

$\Rightarrow$ IG $\perp$ EF (3)

Dễ chứng minh EF // DC (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ IG $\perp$ DC

Vậy Δ DGC cân tại G $\Rightarrow$ DG = GC

ĐỀ SỐ 5

Câu 1: 1) Trừ vào 2 vế của phương trình với $2x \cdot \dfrac{9x}{x+9}$

Ta có: $\left(x - \dfrac{9x}{x+9}\right)^2 = 40 - \dfrac{18x^2}{x+9} \Leftrightarrow \left(\dfrac{x^2}{x+9}\right)^2 + \dfrac{18x^2}{x+9} - 40 = 0$ (1)

Đặt $\dfrac{x^2}{x+9} = y$ (2), phương trình (1) trở thành $y^2 + 18y - 40 = 0$

$\Leftrightarrow (y + 20)(y - 2) = 0 \Leftrightarrow y = -20$; $y = 2$

Thay vào (2), ta có $\left[\begin{array}{l} x^2 = -20(x+9) \\ x^2 = 2(x+9) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2+20x+180=0 & (3) \\ x^2 - 2x - 18 = 0 & (4) \end{array}\right.$

Phương trình (3) vô nghiệm, phương trình (4) có 2 nghiệm là: $x = 1 \pm \sqrt{19}$.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là: $x = 1 \pm \sqrt{19}$.

2) . Điều kiện $\dfrac{x+1}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x \leq -1 \end{array}\right.$ (*)

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow (x - 3)(x + 1) + 3(x - 3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}} = 4$

Đặt $t = (x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}} \Rightarrow t^2 = (x - 3)(x + 1)$

Phương trình trở thành: $t^2 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 1$; $t = -4$

Ta có: $(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}} = 1$ (1) ; $(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}} = -4$ (2)

+ (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ (x-3)(x+1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x^2 - 2x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{5}$. (t/m (*))

+ (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ (x-3)(x+1) = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x^2 - 2x - 19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 - 2\sqrt{5}$. (t/m (*))

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là: $x = 1 + \sqrt{5}$; $x = 1 - 2\sqrt{5}$.

Câu 2: 1) Điều kiện: $1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \Rightarrow 2 - 3x > 0 \Rightarrow A \geq 0$

Vậy $A^2 = \dfrac{25 - 30x + 9x^2}{1 - x^2} = \dfrac{(3 - 5x)^2}{1 - x^2} + 16 \geq 16$.

Dấu bằng xẩy ra khi 3 - 5x = 0 $\Leftrightarrow$ $x = \frac{3}{5}$

Vậy minA = 4.

2) Chứng minh: $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} \geq \sqrt{2}\,(a+b+c)$ (1)

Sử dụng bất đẳng thức: $2(x^2+y^2) \geq (x+y)^2$, ta có:

$2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2 \Rightarrow \sqrt{2}.\sqrt{a^2+b^2} \geq a+b$ (2)

Tương tự, ta được: $\sqrt{2}.\sqrt{b^2+c^2} \geq b+c$ (3) và

$\sqrt{2}.\sqrt{c^2+a^2} \geq c+a$ (4)

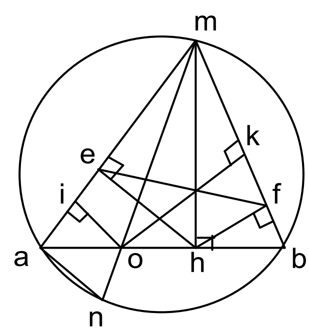
Lấy (2) + (3) + (4) theo từng vế và rút gọn, suy ra (1) đúng, đpcm.

Câu 3: (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta_y = x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2;\ x \geq 2$ (3)

(2) $\Leftrightarrow (y+1)^2 = -x^2 - 2x$ có nghiệm $\Leftrightarrow -x^2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 0$ (4)

Từ (3), (4) ta có: x = - 2, từ đó ta có y = - 1. Vậy hệ có nghiệm (- 2 ; - 1).

Câu 4: Kẻ MP // BD (P $\in$ AD)



MD cắt AC tại K. Nối NP cắt BD tại H.

Ta có $\frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AD}$ mà $\frac{AM}{AB} = \frac{CM}{CD}$ (gt)

$\Rightarrow \frac{AP}{AD} = \frac{CN}{CD} \Rightarrow$ PN // AC Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có $\frac{BO}{OD} = \frac{CO}{OA}$, $\frac{MK}{PK} = \frac{OC}{OA}$

và $\frac{NH}{PH} = \frac{OC}{OA}$. Suy ra: $\frac{NH}{PH} = \frac{MK}{PK} \Rightarrow$ KH // MN

Các tứ giác KENH, MFHK là hình bình hành nên MF = KH và EN = KH $\Rightarrow$ MF = EN $\Rightarrow$ ME = NF

Câu 5: 1) Tứ giác MEHF nội tiếpvì $\widehat{MEH} + \widehat{MFH} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{AMB} = 180^0 - \widehat{EHF} = \widehat{EHA} + \widehat{FHB}$ (1)

Ta có $\widehat{MHF} = \widehat{MEF}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{MF}$)

Lại có $\widehat{MHF} + \widehat{FHB} = 90^0 = \widehat{MEF} + \widehat{EMD}$

$\Rightarrow \widehat{FHB} = \widehat{EMD}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $\widehat{EHA} = \widehat{DMB}$, Gọi N là giao điểm của MD với đường tròn (O) ta có $\widehat{DMB} = \widehat{NAB}$ (góc nội tiếp chắn $\widehat{NB}$)$\Rightarrow$ $\widehat{EHA} = \widehat{NAB}$ do đó AN // EH mà HE $\perp$ MA nên NA $\perp$ MA. hay $\widehat{MAN} = 90^0$ $\Rightarrow$ AN là đường kính của đường tròn. Vậy MD đi qua O cố định.

2) Kẻ DI $\perp$ MA, DK $\perp$ MB, ta có

$$\frac{AH}{BD} = \frac{S_{MAD}}{S_{MBD}} = \frac{AM\ .\ HE}{BM\ .\ DK}\ ;\ \frac{AD}{BH} = \frac{S_{MAD}}{S_{MBH}} = \frac{AM\ .\ DI}{BM\ .\ HF}$$

Vậy $\dfrac{AH}{BD} . \dfrac{AD}{BH} = \dfrac{MA^2}{MB^2} . \dfrac{HE\ .\ DI}{DK\ .\ HF}$ (1)

Ta có $\widehat{HMB} = \widehat{FHB}$ (cùng phụ với $\widehat{MHF}$) mà $\widehat{FHB} = \widehat{EMD}$ (CMT)

$\Rightarrow$ $\widehat{EFH} = \widehat{DIK}$ và $\widehat{EHF} = \widehat{DMH}$.

Tứ giác MEHF nội tiếp nên $\widehat{AMH} = \widehat{EFH}$ vµ $\widehat{EHF} = 180^0 - \widehat{AMB}$

Tứ giác MIDK nội tiếp nên $\widehat{DMB} = \widehat{DIK}$ vµ $\widehat{IDK} = 180^0 - \widehat{AMB}$

$\Rightarrow$ $\widehat{EFH} = \widehat{DIK}$ vµ $\widehat{EHF} = \widehat{IDK}$ $\Rightarrow$ $\Delta DIK \quad \Delta HFE$ (g.g) do đó

suy ra $\dfrac{ID}{HF} = \dfrac{DK}{HE}$ $\Rightarrow$ ID . HE = DK . HF $\Rightarrow$ $\dfrac{HE.DI}{DK.HF} = 1$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow$ $\dfrac{MA^2}{MB^2} = \dfrac{AH}{BD} . \dfrac{AD}{BH}$.

ĐỀ SỐ 6

Câu 1: Ta có: $A = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{-1} + \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{-1} + ... + \dfrac{\sqrt{24} - \sqrt{25}}{-1}$

$= -1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} + ... + \sqrt{25} = -1 + 5 = 4$

Câu 2: a) Từ giả thiết suy ra:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2 + b^2 + c^2}\right) + \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2 + b^2 + c^2}\right) + \left(\frac{z^2}{c^2} - \frac{z^2}{a^2 + b^2 + c^2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}\right) + y^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}\right) + z^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}\right) = 0 \quad (*)$$

Do $\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{a^2 + b^2 + c^2} > 0$; $\dfrac{1}{b^2} - \dfrac{1}{a^2 + b^2 + c^2} > 0$; $\dfrac{1}{c^2} - \dfrac{1}{a^2 + b^2 + c^2} > 0$

Nên từ (*) suy ra x = y = z = 0, do đó M = 0

b) $x^3 = 2a + 3x.\sqrt[3]{a^2 - \left(\frac{a+1}{3}\right)^2\left(\frac{8a-1}{3}\right)}$

$\Leftrightarrow\ x^3 = 2a + 3x\ .\ \dfrac{\sqrt[3]{(1-2a)^3}}{3}\ \Leftrightarrow\ x^3 = 2a + x(1-2a)$

$\Leftrightarrow\ x^3 + (2a-1)\,x - 2a = 0\ \Leftrightarrow\ (x-1)\,(x^2 + x + 2a) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x^2 + x + 2a = 0\ \text{(v« nghiÖm do } a > \frac{1}{8}) \end{array}\right.\ \Leftrightarrow x = 1$

nên x là mét sè nguyên du¬ng

Câu 3:

a) Ta có: $\dfrac{4c}{4c+57} \geq \dfrac{1}{1+a} + \dfrac{35}{35+2b} \geq 2.\sqrt{\dfrac{35}{(1+a)(2b+35)}} > 0$ (1)

Mặt khác $\dfrac{1}{1+a} \leq \dfrac{4c}{4c+57} - \dfrac{35}{35+2b} \Leftrightarrow \dfrac{1}{1+a} - \dfrac{4c}{4c+57} \leq \dfrac{35}{35+2b}$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{1}{1+a} - \dfrac{4c}{4c+57} + 1 \leq 1 - \dfrac{35}{35+2b} = \dfrac{2b}{35+2b}$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{2b}{35+2b} \geq \dfrac{1}{1+a} + \dfrac{57}{4c+57} \geq 2.\sqrt{\dfrac{57}{(1+a)(4c+57)}} > 0$ (2)

Ta có: $1 - \dfrac{1}{1+a} \geq 1 - \dfrac{4c}{4c+57} + \dfrac{35}{35+2b}$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{a}{1+a} \geq \dfrac{57}{4c+57} + \dfrac{35}{35+2b} \geq 2.\sqrt{\dfrac{35\ .\ 57}{(4c+57)(35+2b)}} > 0$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có:

$$\frac{8abc}{(1+a)(4c+57)(2b+35)} \geq 8\ .\ \frac{35\ .\ 57}{(1+a)(2b+35)(4c+57)}$$

Do đó abc ≥ 35.57 = 1995.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = 2$, $b = 35$ và $c = \dfrac{57}{2}$.

Vậy min (abc) = 1995.

b) Đặt $t = \dfrac{A}{a} = \dfrac{B}{b} = \dfrac{C}{c} = \dfrac{D}{d} \;\Rightarrow\;$ A = ta, B = tb, C = tc, D = td.

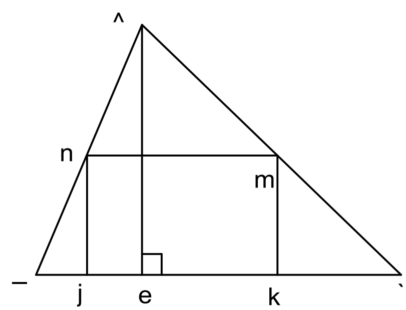
$t = \dfrac{A + B + C + D}{a + b + c + d}$

Vì vậy $\sqrt{aA} + \sqrt{bB} + \sqrt{cC} + \sqrt{dD} = \sqrt{a^2t} + \sqrt{b^2t} + \sqrt{c^2t} + \sqrt{d^2t}$

$= (a + b + c + d)\sqrt{t} = (a + b + c + d)\sqrt{\dfrac{A + B + C + D}{a + b + c + d}}$

$= \sqrt{(a + b + c + d)(A + B + C + D)}$

Câu 4:



a) Xét ΔABC có PQ // BC $\Rightarrow \dfrac{AQ}{AB} = \dfrac{QP}{BC}$

Xét ΔBAH có QM // AH $\Rightarrow \dfrac{BQ}{BA} = \dfrac{QM}{AH}$

Cộng từng vế ta có:

$\dfrac{AQ}{AB} + \dfrac{BQ}{AB} = \dfrac{QP}{BC} + \dfrac{QM}{AH} \;\Rightarrow\; 1 = \dfrac{QP}{BC} + \dfrac{QM}{AH}$

$\Rightarrow\; 1 = \left(\dfrac{QP}{BC} + \dfrac{QM}{AH}\right)^2 \;\geq\; 4\,\dfrac{QP}{BC}\cdot\dfrac{QM}{AH} = \dfrac{2S_{MNPQ}}{S_{ABC}}$

$\Rightarrow\; S_{MNPQ} \;\leq\; \dfrac{S_{ABC}}{2}.$

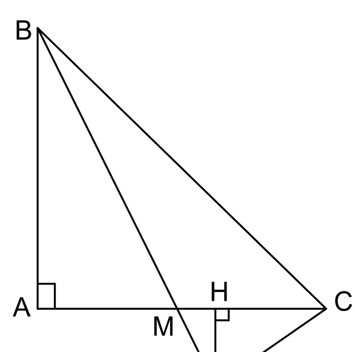
$\max S_{MNPQ} = \dfrac{S_{ABC}}{2}$ khi $\dfrac{QP}{BC} = \dfrac{QM}{AH} = \dfrac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; QP = \dfrac{BC}{2}$

Tức là khi PQ là đường trung bình của ΔABC, khi đó PQ đi qua trung điểm AH.

b) Vì $1 = \dfrac{QP}{BC} + \dfrac{QM}{AH}$ mà BC = AH $\Rightarrow\; 1 = \dfrac{QP + QM}{BC} \;\Leftrightarrow\;$ QP + QM = BC

Do đó chu vi (MNPQ) = 2BC (không đổi)

Câu 5:



ΔHCD đồng dạng với Δ ABM (g.g) mà

AB = 2AM nên HC = 2HD.

Đặt HD = x thì HC = 2x. Ta có:

$DH^2 = HM . HC$ hay $x^2 = HM . 2x$

$\Rightarrow$ $HM = 0,5x$; $MC = 2,5x$; $AM = 2,5x$; $AH = 3x$.

Vậy $AH = 3HD$.

MỤC LỤC

Trang